ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 18 OCTOBRE 1948.

PRÉSIDENCE DE M. HENRI VILLAT.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** informe l'Académie qu'à l'occasion de la séance anniversaire de la fondation de l'Institut, la prochaine séance hebdomadaire aura lieu le mercredi 27 octobre au lieu du lundi 25.

M. le **Président** annonce le décès de M. **Johan Hjort**, Correspondant pour la Section d'Anatomie et Zoologie, survenu à Oslo, le 7 octobre 1948.

Notice nécrologique sur Johan Hjort par M. **Louis Fage**.

Johan Hjort, Correspondant de l'Académie des Sciences pour la Section d'Anatomie et de Zoologie depuis 1946, est mort le 7 octobre, dans sa propriété de Hofstad Gaard, près d'Oslo. Avec lui disparaît un des savants qui ont le plus honoré l'Océanographie.

Johan Hjort est né le 18 février 1869 à Oslo. Sur les conseils de son père, professeur à la Faculté de Médecine, il commença ses études médicales. Mais bientôt, attiré par la biologie, il partit pour Munich où il entreprit, dans le laboratoire de Richard Hertwig, des recherches fort intéressantes, notamment sur l'embryologie des Salpes. Au bout de quelques années, de retour en Norvège, il se trouva aux prises avec des problèmes de biologie marine que posait l'exploitation des eaux norvégiennes. Il résolut d'étudier les relations existant entre les animaux marins et les conditions de milieu auxquelles ils sont assujettis, espérant ainsi substituer à l'empirisme qui présidait à cette exploitation des bases scientifiques.

Les recherches, les expériences entreprises d'abord sur la Morue et les autres Gades de l'Atlantique Nord montrèrent, en effet, que chaque espèce considérée obéissait à des conditions de milieu particulières et différentes pour une même espèce suivant l'âge, suivant chaque période de son cycle vital. Chaque espèce, notamment a ses exigences propres au moment de la reproduction, laquelle ne peut s'accomplir que dans la mesure où celles-ci sont satisfaites.

On en devait conclure que si après la ponte les reproducteurs ou les alevins issus de leurs œufs quittaient les frayères ainsi caractérisées, ils devaient fatalement y revenir à chaque maturité. Hjort le prouva en marquant des Morues, d'une part, au printemps sur les aires de pontes de Norvège et, d'autre part, en automne sur la côte du Finmark au moment de la pêche dans ces parages. Les reprises nombreuses établirent d'une façon décisive la réalité de ce retour périodique des reproducteurs sur les aires de ponte préalablement déterminées, après un voyage de plusieurs milliers de kilomètres.

Semblable démonstration fut faite par lui et ses élèves pour le Hareng de Norvège.

Ces migrations génétiques, ces migrations de dispersion qui alternent dans le cycle vital de nombreuses espèces sont aujourd'hui des notions familières; et leur banalité tend à faire oublier à qui nous en sommes redevables. Il faut donc rappeler que c'est à Johan Hjort, que nous devons ces notions classiques qui, appliquées à des espèces d'un haut intérêt économique, constituent le guide le plus précieux de l'Industrie des pêches.

Les espèces étudiées, Morue, Hareng, se présentent en bancs énormes, composés d'innombrables individus. Hjort fut ainsi conduit à analyser la constitution de ces bancs. Il en trouva le moyen par l'emploi d'une méthode qui permet de déterminer l'âge, la vitesse de croissance de chaque individu par l'examen des zones circulaires inscrites sur certaines pièces du squelette et sur les écailles. Des recherches poursuivies pendant de nombreuses années ont en effet établi que ces bancs sont constitués par des individus d'âge différent où les individus de même âge ou de même classe, comme disent les militaires, forment un effectif d'importance variable suivant les années. Or, les périodes de prospérité pour la pêche sont celles où une de ces classes a pris soudain une importance numérique marquée qu'elle conserve alors pendant plusieurs années. Lorsque cette classe dominante s'épuise, la pêche devient extrêmement pauvre jusqu'au moment où une nouvelle classe, favorisée, nombreuse en individus vient la remplacer. Les fluctuations des pêches, aux effets parfois si désastreux, sont donc déterminées par l'ensemble des facteurs du milieu qui influent sur le développement des œufs et la production annuelle des alevins. Hjort a eu ainsi le mérite de montrer que c'est à la période critique où l'alevin ayant épuisé ses réserves doit trouver lui-même sa nourriture que l'effectif de la classe à laquelle il appartient est fixé avec toutes ses conséquences.

L'étude de ces fluctuations amena Johan Hjort à constater que l'augmentation du nombre des individus, serait-elle de 1 à 30, comme cela s'est produit pour le Hareng dans quelques années particulièrement prospères, ne modifie nullement la croissance des individus. Ce qui veut dire que, dans le cas particulier, il existe une grande marge entre les moyens de subsistance et l'utilisation de ces moyens par les poissons. Ceci le conduit à confronter ses résultats avec ceux que fournit l'étude expérimentale des populations

dans d'autres domaines, notamment celui des Bactéries, pour en venir à l'étude des populations humaines. Il le fait en termes extrêmement élevés dans son mémoire *Essay on population* qui reproduit, au pluriel, le titre du célèbre ouvrage de Malthus.

Des problèmes analogues se sont posés à Hjort à propos des Cétacés quand, en présence de l'accroissement rapide des moyens de capture on a craint l'anéantissement prochain des troupeaux de Baleines. Il a poursuivi à cet effet une série d'études biologiques et statistiques afin de définir ce que l'on peut appeler l'optimum de capture, c'est-à-dire le maximum du nombre des prises compatible avec la permanence d'une industrie. L'évaluation du stock a pu être estimé et une entente internationale est intervenue qui fixe annuellement le nombre des captures.

A ces recherches brièvement résumées, il faudrait ajouter celles entreprises par Hjort sur la biologie d'une belle Crevette de profondeur, le *Pandalus borealis*, dont les rassemblements obéissant à des règles qu'il a parfaitement définies et qui lui ont permis, par la découverte de fonds de pêche jusque là ignorés, de doter la Norvège d'une industrie nouvelle.

Ces recherches qui, pour la plupart, ont été suivies d'applications pratiques du plus haut intérêt, sont l'œuvre d'un biologiste remarquable qui connaissait admirablement les choses de la mer. Il avait été d'ailleurs à bonne école, quand, en 1910, sous l'égide de Sir John Murray, leader de la mémorable expédition du *Challenger*, il organisa l'Expédition du *Micheal Sars*, dans l'Atlantique Nord. Expédition dont les résultats, consignés dans une série de Mémoires, sont mis en lumière et résumés dans son ouvrage *The Depths of the Ocean*, qui est resté longtemps le *vade mecum* de tous les océanographes.

Au mois d'août dernier, tandis que je naviguais en sa compagnie sur le fjord d'Oslo, il me confiait : « Ce n'est pas seulement le poisson qu'il faut étudier, mais aussi le pêcheur ». Pour Johan Hjort, en effet, l'expérience biologique était souvent doublée d'une expérience sociale. Ces préoccupations humaines, qui se font jour çà et là tout au long de son œuvre, sont explicitement exprimées dans un livre paru sous sa signature dans la Bibliothèque de philosophie scientifique et ayant pour titre : *La crise de la Vérité*.

Depuis longtemps professeur à la Faculté des Sciences d'Oslo, sa notoriété mondiale lui avait valu la présidence du Conseil international pour l'Exploration de la Mer qu'il conserva jusqu'à sa mort.

M. le Secrétaire perpétuel dépose sur le Bureau le volume III, deuxième série, des *Œuvres d'Euler*, publiées par la Société Helvétique des Sciences naturelles.

M. Pierre Chevenard fait hommage à l'Académie d'un Ouvrage de M. Louis Colombier, intitulé *Métallurgie du fer*, dont il a écrit la *Préface*.

CORRESPONDANCE.

M. Pierre-P. Grassé prie l'Académie de bien vouloir le compter au nombre des candidats à la place vacante, dans la Section d'Anatomie et Zoologie, par l'élection de M. *Robert Courrier* aux fonctions de Secrétaire perpétuel pour les Sciences Physiques.

M. le Secrétaire perpétuel signale parmi les pièces imprimées de la Correspondance :

1° Collection des travaux de l'Académie Internationale d'Histoire des Sciences, n° 2. *Actes du Ve Congrès International d'Histoire des Sciences* (Lausanne 30 septembre-6 octobre 1947).

2° René Bourret. *Comment déterminer une Tortue d'Indochine. — Comment déterminer un Batracien d'Indochine. — Comment déterminer un Lézard d'Indochine.*

3° Gouvernement général de l'Indochine. Conseil des recherches scientifiques de l'Indochine. *Bibliographie analytique des travaux scientifiques en Indochine*, 1939, 1940, 1941 (*Sciences médicales et vétérinaires*), par B. Noyer.

4° Université indochinoise. Publications de l'École supérieure des Sciences. *Les Oiseaux du Tranninh*, par A. David-Beaulieu.

5° Id. *Notes et travaux de l'École supérieure des Sciences*, nos 1, 2, 3.

6° Comision Nacional de cooperacion intelectual. *Argentina en marcha.* Tomo I.

7° *Las Malvinas son Argentinas* (*Recopilacion de antecedentes*). Publicacion n° 1 de la Subsecretaria de Cultura.

8° Max Planck. *Wissenschaftliche Selbstbiographie mit einem Bildnis und der von Max von Laue gehaltenen Traueransprache.*

9° Protectorat de la République française au Maroc. Direction de l'Agriculture, du Commerce et des Forêts. Production agricole. *Les Cahiers de la Recherche agronomique.* I.

10° Archives de l'Institut international des Sciences théoriques. Série A. Bulletin de l'Académie internationale de philosophie des Sciences. 1. *Problèmes de philosophie des Sciences* (*premier Symposium.* Bruxelles 1947). I. *Les méthodes de la connaissance.*

11° Premier Congrès international de Physio-Pathologie de la reproduction animale et d'insémination artificielle. Milan, 23-30 juin 1948. *Résolutions.*

Il signale également une Note polycopiée :

Institut international des Sciences théoriques. Palais des Académies. Bruxelles. *Prix Eddington de 50.000 francs belges.* Sujet : *Exposé et Critique des conceptions d'Eddington concernant la philosophie de la Science Physique.*

THÉORIE DES GROUPES. — *Un théorème concernant le nombre des bases d'un sous-groupe transitif et primitif, à base du second ordre, du groupe symétrique.* Note (*) de Mlle SOPHIE PICCARD, présentée par M. Arnaud Denjoy.

Soit n un entier ≥ 4, soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe symétrique d'ordre n et soit $\mathfrak{A}_n$ le sous-groupe alterné de $\mathfrak{S}_n$.

S'il existe une substitution non identique R du groupe $\mathfrak{S}_n$ permutable avec toutes les substitutions d'un sous-groupe transitif G de $\mathfrak{S}_n$, alors la substitution R est *régulière* et G est le groupe cyclique engendré par R, si R est circulaire, ou bien, si R se compose d'un nombre $r \geq 2$ de cycles, G est un groupe *imprimitif*, qui a pour systèmes d'imprimitivité les r ensembles formés des éléments des différents cycles de R.

Il s'ensuit que, quel que soit le sous-groupe *transitif* et *primitif* G du groupe $\mathfrak{S}_n$, il n'existe aucune substitution non identique R du groupe $\mathfrak{S}_n$ qui soit permutable avec toutes les substitutions de G.

Soit, à présent, G un sous-groupe transitif et primitif de $\mathfrak{S}_n$ *à base du second ordre*(1). Alors, quelle que soit la base S,T de G, il n'existe aucune substitution non identique R du groupe $\mathfrak{S}_n$ qui soit permutable aussi bien avec S qu'avec T. En effet, si une telle substitution existait, elle serait permutable avec toutes les substitutions de G, ce qui est impossible. Et, s'il existe une substitution R de $\mathfrak{S}_n$ qui transforme S en T et T en S, cette substitution R est du second ordre et elle est unique. En effet, si R est une substitution de $\mathfrak{S}_n$, telle que $RSR^{-1} = T$ et que $RTR^{-1} = S$, la substitution R^2 est alors permutable aussi bien avec S qu'avec T, donc $R^2 = 1$, et, si R' est une seconde substitution du groupe $\mathfrak{S}_n$ qui transforme S en T et T en S, alors $R'^{-1}R$ est permutable aussi bien avec S qu'avec T, donc $R'^{-1}R = 1$ et $R' = R$. Soit encore S,T une base quelconque de G, et soit U une substitution quelconque du groupe $\mathfrak{S}_n$. Posons $USU^{-1} = S'$, $UTU^{-1} = T'$. Si $S' \in G$ et si $T' \in G$, alors S', T' est aussi une base de G, nous l'appellerons la *transformée* de la base S,T par la substitution U. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution U de $\mathfrak{S}_n$ transforme une base S,T de G en une base de G, c'est que $UGU^{-1} = G$. Donc l'ensemble des substitutions de $\mathfrak{S}_n$ qui transforment une base de G en une base de G se confond avec le sous-groupe Γ de $\mathfrak{S}_n$ formé de toutes les substitutions de $\mathfrak{S}_n$ permutables avec le groupe G, groupe dont G est un sous-groupe distingué. Soit m l'ordre de Γ. C'est un multiple de l'ordre de G_Γ. Quelle que soit la base S,T de G, s'il existe une substitution R de Γ qui transforme la base S,T en elle-même, d'après

(*) Séance du 4 octobre 1948.

(1) Un tel groupe n'est pas cyclique, mais possède des couples d'éléments générateur appelés bases de ce groupe.

ce qui précède, cette substitution R est du second ordre, elle est unique et transforme S en T et T en S. Si une telle substitution R n'existe pas, nous dirons que la base S,T est du type 1 et nous dirons qu'elle est du type 2 dans le cas contraire.

Soient 1° $S_1, T_1; S_2, T_2, \ldots, S_N, T_N$ une suite formée de bases de G, telle que, quels que soient les indices i et $j (1 \neq i \neq N, 1 \neq j \neq N, i \neq j)$, il n'existe aucune substitution U du groupe Γ qui transforme la base S_i, T_i en la base S_j, T_j, et que, quelle que soit la base S, T de G, il existe un indice $i (1 \neq i \neq N)$ et une substitution U de Γ, telle que la base S, T est la transformée de la base S_i, T_i par la substitution U. On détermine aisément une telle suite (1°) par induction. Chacune des bases $S_i, T_i (1 \neq i \neq N)$ possède soit m, soit $m/2$ transformées distinctes au moyen des subtitutions de Γ. En effet, soit i un indice quelconque, tel que $1 \neq i \neq N$. Supposons d'abord que la base S_i, T_i est du type 1 et soient U et V deux substitutions distinctes quelconques de Γ. Posons $US_iU^{-1} = S'$, $UT_iU^{-1} = T'$, $VS_iV^{-1} = S''$, $VT_iV^{-1} = T''$. S', T' et S'', T'' sont deux bases de G. Montrons que ces bases sont distinctes. En effet, supposons le contraire. Deux cas sont alors possibles : a. $S' = S''$, $T' = T'$. Mais alors la substitution $V^{-1}U$ du groupe Γ est permutable aussi bien avec S_i qu'avec T_i, ce qui implique que $V^{-1}U = 1$, donc $V = U$, ce qui est contradictoire. Le cas (a) ne saurait donc se présenter. Ou bien b. $S' = T''$, $T' = S''$. Mais alors la substitution non identique $V^{-1}U$ du groupe Γ transforme la base S_i, T_i de G en elle-même, ce qui est contraire à notre hypothèse que cette base est du type 1. Le cas (b) ne saurait également pas se présenter. Il s'ensuit que la base S_i, T_i possède bien m transformées distinctes au moyen des substitutions de Γ. Supposons maintenant que la base S_i, T_i est du type 2. Il existe donc une substitution non identique R et une seule de Γ, telle que $R^2 = 1$, $RS_iR^{-1} = T_i$. Soit U une substitution quelconque de Γ et soit $US_iU^{-1} = S$, $UT_iU^{-1} = T$. On voit alors aisément qu'il existe une seconde substitution $V \neq U$ de Γ et une seule, notamment $V = UR$, qui transforme, elle aussi, la base S_i, T_i de G en S, T (elle transforme S_i en T et T_i en S). Donc le nombre total de transformées distinctes de la base S_i, T_i par les substitutions de Γ est $m/2$.

Soit E_i l'ensemble des bases distinctes de G, transformées de la base S_i, T_i par les substitutions de Γ, $i = 1, 2, \ldots, N$. On voit sans peine que, si i et j sont deux nombres distincts de la suite $1, 2, \ldots, N$, les ensembles E_i et E_j sont disjoints. L'ensemble E_i est de puissance m ou $m/2$, quel que soit $i = 1, 2, \ldots, N$, et l'ensemble $E_1 + \ldots + E_N$ comprend toutes les bases de G. Soit N_1 le nombre des bases de la suite (1°) qui possèdent m transformées distinctes au moyen des substitutions de G, soit $N_2 = N - N_1$ et soit $\mathfrak{U}$ le nombre total de bases de G. Si $N_2 = 0$, $\mathfrak{U} = mN$ et, si $N_2 > 0$, $\mathfrak{U} = (2N_1 + N_2)m/2$. On a donc la

Proposition. — *Quel que soit le sous-groupe transitif et primitif* G *du groupe* $\mathfrak{S}_n$, *à base du second ordre, le nombre total de bases de* G *est un multiple de* m *ou*

de $m/2$, m désignant le nombre des substitutions du groupe $\mathfrak{S}_n$ qui transforment le groupe G *en lui-même.*

Exemple. — Soit $G = \mathfrak{A}_n$. Alors $\Gamma = \mathfrak{S}_n$, $m = n!$, $N_1 > 0$, $N_2 > 0$ et le nombre total de bases de $\mathfrak{A}_n$ est toujours un multiple de $n!/2$.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Géométrie des nombres d'ensembles non convexes.* Note (*) de M. CLAUDE CHABAUTY, présentée par M. Élie Cartan.

Soit

$$\psi(n) = \operatorname*{Sup}_{(x_h)} \operatorname*{Inf}_{(y_h)} \prod_{h=1}^{n} \left(\frac{x_h}{y_h}\right)$$

pour tous les systèmes de n nombres réels x_h avec $0 < x_h < +\infty$, $x_{h+1} \geq x_h$ et pour tous les systèmes de n nombres réels y_h avec $0 < y_h < x_h$ et les rapports y_{h+1}/y_h entiers. Nous avons établi que $\psi(2) = \sqrt{2}$ et que $\psi(n)$ est majoré par $2^n/2^{1+1/2+\ldots+1/n} < 2^{n-C}/n^{\log 2}$, C étant la constante d'Euler.

Dans l'espace numérique à n dimensions R^n, notons $m(G)$ le *déterminant* d'un *réseau* G (sous-groupe discret et de dimension linéaire n du groupe additif de R^n) et Γ l'ensemble des réseaux. Soit S un ensemble $\subset R^n$, étoilé par rapport à l'origine notons $\mu_h(S, G)$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ la borne supérieure des nombres $\mu \geq 0$ tels que la dimension linéaire de $(\mu S) \cap G$, soit $< h$. Posons

$$\gamma(S) = (m(G))^{-\frac{1}{n}} \operatorname*{Sup}_{G \in \Gamma} \mu_1(S, G),$$

$$\rho(S) = (m(G))^{-1} \prod_{h=1}^{n} \mu_h(S, G),$$

$$\alpha(S) = \rho(A)(\gamma(A))^{-n},$$

en utilisant les conventions $0 \times \infty = 0$, $0/0 = 1$, $\infty/\infty = 1$). $\alpha(S)$ est un nombre toujours ≥ 1 que nous appellerons l'*anomalie* de S.

THÉORÈME 1. — *L'anomalie d'un ensemble de* R^n, *étoilé par rapport à l'origine, est toujours* $\leq \psi(n)$.

Soit S un tel ensemble (i. e. $P \in S$ entraîne que le segment OP est dans S), G un réseau, écrivons μ_h pour $\mu_h(S, G)$ et supposons $\mu_1 > 0$, $\mu_n < +\infty$. On peut choisir des variétés linéaires homogènes L_h $(h = 0, 1, 2, \ldots, n)$ de dimension h telles que $L_h \subset L_{h+1}$ et que $(\mu S) \cap G \subset L_{h-1}$ pour tout $\mu < \mu_h$. Prenons les nombres μ'_h, $(h = 1, 2, \ldots, n)$ tels que (a) $0 < \mu'_h < \mu_h$, et que (b) les $n - 1$ quotients $\tau_{h+1} = (\mu'_{h+1}/\mu'_h)$ soient entiers. Définissons n réseaux G_h en

(*) Séance du 4 octobre 1948.

leur construisant par récurrence des bases $\Lambda_h = (l_1^{(h)}, \ldots, l_n^{(h)})$ par les conditions $l_r^{(h)} = \tau_h l_r^{(h-1)}$ pour $r < h$ et $l_r^{(h)} = l_r^{(h-1)}$ pour $r \geq h$, en partant de $G_1 = G$ et Λ_1 telle que $l_1^{(1)}, \ldots, l_r^{(1)}$ engendrent L_r pour tout $r = 1, \ldots, n$. On a donc

$$m(G_n) = m(G)\, \mu_n'^n \prod_{n=1}^{n} (\mu_h'^{-1}).$$

Par construction $G_h \subset G_{h-1} \subset G$ et $G_h \cap L_{h-1} = \tau_h(G_{h-1} \cap L_{h-1})$. Posons $S_h = \mu_h' S$. De la condition $\mu_h' < \mu_h$ résulte que $S_h \cap G \subset L_{h-1}$. Par conséquent $G_h \cap S_h = \tau_h(G_{h-1} \cap S_{h-1})$ et finalement $G \cap S_1 = \{0\}$ entraîne $G_n \cap S_n = \{0\}$. De la définition de γ résulte alors que $[\gamma(S_n)]^n m(G_n) \geq 1$, donc

$$\prod_{h=1}^{n} \mu_h' \leq [\gamma(S)]^n m(G).$$

Mais d'après la définition de $\psi(n)$ on peut toujours trouver des nombres μ_h' satisfaisant aux conditions (a) et (b), tels que

$$\prod_{h=1}^{n} \left(\frac{\mu_h'}{\mu_h}\right) \leq \psi(n)(1+c)$$

quel que soit $c > 0$. On a donc

$$\prod_{n=1}^{n} \mu_h(S, G) \leq \psi(n)[\gamma(S)]^n m(G). \tag{1}$$

On démontre aisément que la condition $\mu_1 > 0$ entraîne $\mu_n < +\infty$ si $\gamma < +\infty$. Dans les autres cas l'inégalité (1) est triviale avec les conventions adoptées. Sa validité dans tous les cas démontre le théorème.

Désignons maintenant par $V(A)$ le *domaine vectoriel* d'un ensemble A $[V(A) = \mathcal{E}_x(x = u - v,\ u \in A,\ v \in A)]$ et posons $\nu_h(A, G) = \mu_h[V(A), G]$, $\xi(A) = \gamma[V(A)]$, $\Delta(A) = 1/[\xi(A)]^n$, $\eta(A) = \text{mes. int}(A)/\Delta(A)$. Le théorème 1 a pour corollaire immédiat :

THÉORÈME 2. — *Si le domaine vectoriel d'un ensemble* $A \subset R^n$ *est étudié par rapport à l'origine (en particulier si* A *est étoilé par rapport à l'origine) on a pour tout réseau* G

$$\prod_{h=1}^{n} \nu_h(A, G)\ \text{mes. int}(A) \leq \psi(n)\eta(A) m(G). \tag{2}$$

Si dans l'inégalité (2) on remplace $\eta(A)$ par la constante 1 (à laquelle elle est toujours inférieure ou égale d'après le *lemme de Blichfeld*), on obtient une

inégalité plus faible, due à Jarnik et Knichal [1] [dans laquelle en outre ils donnent seulement pour $\psi(n)$ la majoration 2^{n-1}].

Dans le cas d'une *jauge* K (convexe Körper de Minkowski), on a $\mu_h = 2\nu_h$. Comparons nos résultats à l'inégalité classique de Minkowski :

$$\prod_{h=1}^{n} \mu_h(\mathrm{K}, \mathrm{G}) \,\mathrm{mes}(\mathrm{K}) \leqq 2^n m(\mathrm{G})$$

qui donne $\alpha(\mathrm{K}) \leqq 1/\eta(\mathrm{K})$. Or pour une jauge arbitraire on a démontré $\eta(\mathrm{K}) \leqq 2^{-n}(\mathrm{C} + \mathrm{O}(n))$, où $\mathrm{C} \neq 4{,}9$ (*Davenport*). D'où une majoration de l'*anomalie d'une jauge arbitraire* plus faible que la nôtre (au moins pour n assez grand), puisque nous savons que $\psi(n)/2^n = 0, 1$, et il n'ést pas exclu que, pour une jauge convenable, l'inégalité (2) soit plus forte que l'inégalité de *Minkowski*. (Rappelons que pour les jauges ellipsoïdales et pour les jauges planes *Minkowski* a démontré $\alpha(\mathrm{K}) = 1$, et qu'on ne connaît pas d'exemple de jauge d'anomalie > 1.)

D'autre part nous avons pu donner des exemples d'ensembles étoilés (non convexes) d'anomalie > 1, en particulier un ensemble plan d'anomalie $\geqq 4/3$ (valeur voisine de $\psi(2) = \sqrt{2}$).

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Inégalités relatives à la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe dans le plan fini*. Note (*) de M. E. F. COLLINGWOOD, présentée par M. Paul Montel.

1. Nous allons appliquer au cas d'une fonction $f(z)$ méromorphe dans le plan fini, certains résultats obtenus antérieurement [1]. Nous conserverons les mêmes définitions et notations, mais nous aurons besoin de ces définitions :

$$\bar{\mathrm{I}}[\sigma(r), f] = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log} \dfrac{1}{\sigma(r)}}{\mathrm{T}(r, f)}$$

sera l'*indice supérieur*,

$$\underline{\mathrm{I}}[\sigma(r), f] = \underline{\lim_{r=\infty}} \frac{\overset{+}{\log} \dfrac{1}{\sigma(r)}}{\mathrm{T}(r, f)}$$

sera l'*indice inférieur*; et, là où la limite existe

$$\mathrm{I}[\sigma(r), f] = \lim_{r=\infty} \frac{\overset{+}{\log} \dfrac{1}{\sigma(r)}}{\mathrm{T}(r, f)}$$

sera l'*indice*, relativement à $f(z)$, du niveau $\sigma(r)$, défini dans $0 \leqq r < \infty$.

---

(1) *Rospravy II tridy Ceske Akad.*, 53, n° 43, 1943. Cf. *Math. Reviews*, 1947.

(*) Séance du 11 octobre 1948.

(1) *Comptes rendus*, 227, 1948, p. 615 et 709.

Avec les notations usuelles

$$\delta(a) = \lim_{r=\infty} \frac{m(r, a)}{T(r, f)}$$

est la déficience et

$$\Delta(a) = \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{m(r, a)}{T(r, f)}$$

la déficience supérieure (de Valiron) de la valeur a de $f(z)$.

2. Théorème I. — *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan fini et $\sigma(r)$ une fonction de r finie, positive et non croissante pour tout $r < \infty$; on a alors, étant donné un nombre complexe quelconque a :*

$$(1) \quad \begin{cases} (a) & \Delta(a) \leqq \overline{\lim\limits_{r=\infty}} \dfrac{P[r, a, \sigma(r)] \log r}{T(r, f)} + \overline{I}[\sigma(r), f], \\ (b) & \delta(a) \leqq \overline{\lim\limits_{r=\infty}} \dfrac{P[r, a, \sigma(r)] \log r}{T(r, f)} + \underline{I}[\sigma(r), f], \\ (c) & \delta(a) \leqq \underline{\lim\limits_{r=\infty}} \dfrac{P[r, a, \sigma(r)] \log r}{T(r, f)} + I[\sigma(r), f]. \end{cases}$$

Donnons un aperçu de la démonstration. Étant donné $p(r)$ tel que $0 \leqq p(r) < \infty$ pour tout $r < \infty$, nous avons défini $V = V[a, \sigma(r), p(r)]$ et $\mathcal{C}V = \mathcal{C}V[a, \sigma(r), p(r)]$; et nous avons démontré que *si $r = \infty$ est un point limite de V, on a, pour tout $r \in V$,*

$$(2) \qquad m(r, a) < (\pi + \log r)\, p(r) + \log \frac{1}{\sigma(r)} + O(1).$$

Comme corollaires immédiats de ce résultat, nous avons :

Lemme 1. — *Étant donnés les fonctions $\sigma(r)$ et $p(r)$ et un nombre complexe a, si l'une des inégalités*

$$\Delta(a) > \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{p(r) \log r}{T(r, f)} + I[\sigma(r), f], \qquad \delta(a) > \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{p(r) \log r}{T(r, f)} + I[\sigma(r), f]$$

est satisfaite, $r = \infty$ est un point limite de $\mathcal{C}V[a, \sigma(r), p(r)]$.

Lemme 2. — *Si, étant donnés $\sigma(r)$, $p(r)$ et un nombre complexe a*

$$\delta(a) > \overline{\lim_{r=\infty}} \frac{p(r) \log r}{T(r, f)} + \overline{I}[\sigma(r), f],$$

$r = \infty$ n'est pas un point limite de $V[a, \sigma(r), p(r)]$. Pour démontrer (1) (a) nous pouvons nous borner au cas où $0 \leqq \overline{I}[\sigma(r), f] < \delta(a)$, et $p(r)$ étant arbitraire dans le lemme 1, nous pouvons poser

$$(3) \qquad \lim_{r=\infty} \frac{p(r) \log r}{T(r, f)} = \Delta(a) - \overline{I}[\sigma(r), f] - \varepsilon,$$

où ε est arbitrairement petit et il s'ensuit que $r = \infty$ est un point limite de

$\complement V[a, \sigma(r), p(r)]$. Donc, en écrivant $r' \in \complement V[a, \sigma(r), p(r)]$, on a

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{P[r, a, \sigma(r)]}{T(r, f)} \geq \overline{\lim_{r'\to\infty}} \frac{P[r', a, \sigma(r')]}{T(r', f)} \geq \underline{\lim} \frac{p(r')\log r'}{T(r', f)} = \Delta(a) - I[\sigma(r), f] - \varepsilon,$$

ce qui démontre (1) (a). En égalant le premier membre de (3) à $\delta(a) - I[\sigma(r), f] - \varepsilon$ ou à $\delta(a) - I[\sigma(r), f] - \varepsilon$, on déduit (1) ($b$) et (1) ($c$) des lemmes 1 et 2 respectivement.

3. Moyennant une condition plus restrictive, on améliore les inégalités :

Théorème II. — *Si les conditions du théorème* I *sont remplies et si, de plus, il existe une courbe tendant vers l'infini et sur laquelle* $1/|f(z) - a|$ *est borné* [*ou* $f(z)$ *pour* $a = \infty$], *on a*

$$(4)\quad \begin{cases} (a) & \Delta(a) \leq \dfrac{\pi}{2} \overline{\lim_{r=\infty}} \dfrac{P[r, a, \sigma(r)]}{T(r, f)} + I[\sigma(r), f], \\ (b) & \delta(a) \leq \dfrac{\pi}{2} \overline{\lim_{r=\infty}} \dfrac{P[r, a, \sigma(r)]}{T(r, f)} + \underline{I}[\sigma(r), f], \\ (c) & \delta(a) \leq \dfrac{\pi}{2} \underline{\lim_{r=\infty}} \dfrac{P[r, a, \sigma(r)]}{T(r, f)} + I[\sigma(r), f]. \end{cases}$$

Dans les conditions de ce théorème, il résulte d'un précédent résultat que pour $r \in V[a, \sigma(r), p(r)]$ $[0 \leq p(r) < \infty]$, on a

$$m(r, a) < \frac{\pi}{2} p(r) + \log \frac{1}{\sigma(r)} + O(1).$$

On raisonne alors en utilisant cette inégalité à la place de (2).

4. Les théorèmes I et II donnent des bornes supérieures des déficiences $\Delta(a)$ et $\delta(a)$; ou des bornes inférieures pour les indices $I[\sigma(r), f]$ et $I[\sigma(r), f]$; ou des conditions limitant inférieurement la croissance de $P[r, a, \sigma(r)]$ en fonction des déficiences $\Delta(a)$ et $\delta(a)$ et des indices $I[\sigma(r), f]$ et $I[\sigma(r), f]$. Supposons, par exemple $\delta(a) > 0$ et que $\sigma(r)$ ait pour indice $I[\sigma(r), f] = \vartheta\delta(a)$ avec $0 \leq \vartheta < 1$. On aura alors, en général,

$$\underline{\lim} \frac{P[r, a, \sigma(r)] \log r}{T(r, f)} \geq (1 - \vartheta)\,\delta(a) > 0,$$

ou, dans les conditions du théorème II,

$$(5)\quad \frac{\pi}{2} \underline{\lim} \frac{P[r, a, \sigma(r)]}{T(r, f)} \geq (1 - \vartheta)\,\delta(a) > 0.$$

Si $\sigma(r)$ est une constante, ces inégalités sont valables pour $\vartheta = 0$. L'inégalité (5) est la meilleure possible à un facteur constant près comme le montre une fonction introduite par Mme L. Schwartz (*Comptes rendus*, 212, 1942, p. 382-384) et pour laquelle si $\sigma < 1$, $\lim P(r, 0, \sigma)/T(r, f) = \infty$, tandis que $\delta(0) > 0$.

THÉORIE DES FONCTIONS. — *Fonctions presque loxodromiques et fonctions presque automorphes.* Note de M. **Paul Métral**, présentée par M. Paul Montel.

1. Nous définirons d'abord les fonctions *presque loxodromiques* dans le domaine des fonctions continues : $f(x)$ sera dite p. l. si à tout nombre positif ε correspond un nombre N, tel que dans *tout* intervalle (u, Nu) existe un nombre a tel que

$$|f(ax)-f(x)|<\varepsilon$$

pour toutes les valeurs réelles de x. Bien que ces fonctions soient liées aux fonctions de M. H. Bohr par un changement de variable évident, il est peut-être intéressant de les étudier séparément, de même que dans le domaine analytique on étudie les fonctions loxodromiques indépendamment des fonctions elliptiques.

On vérifie ainsi qu'une fonction p. l. est bornée, qu'une somme finie de p. l. est p. l.; l'existence d'une moyenne

$$\mathfrak{M}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T\frac{f(x)}{x}\,dx,$$

qui joue ici le rôle fondamental de

$$\mathfrak{M}\{f(x)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx$$

pour les fonctions presque périodiques.

2. Signalons dès maintenant l'utilisation fréquente de la remarque suivante : étant *donnée* une fonction continue $f(x)$, nous dirons que $F(x)$ est *associée* d'une manière presque périodique à $f(x)$, si étant donné $\varepsilon>0$ quelconque, on peut lui faire correspondre une longueur l, dépendant de f et de ε, telle que, dans tout intervalle de longueur l, existe un nombre τ tel que

$$|F(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon$$

pour toutes les valeurs de x; on vérifie facilement que ces fonctions $f(x)$ admettent un théorème de la moyenne analogue à celui des fonctions presque périodiques.

De même, $f(x)$ étant toujours *donnée*, $F(x)$ sera dite associée d'une manière presque loxodromique, si à tout $\varepsilon>0$ correspond N, tel que dans tout intervalle (u, Nu) existe a tel que

$$|F(ax)-f(x)|<\varepsilon$$

pour toutes les valeurs de x. Ces fonctions F admettent un théorème de la moyenne, mais naturellement utilisant $\frac{1}{T}\int_1^T\frac{F(x)}{x}\,dx$.

On sait comment M. Bochner a édifié une théorie des fonctions presque périodiques abstraites, en utilisant les éléments de translation [1]: on peut

[1] *Acta Mathematica*, 61, 1933, p. 149-183.

transposer une partie des résultats au cas loxodromique par l'emploi des éléments d'homothétie, par exemple la notion de normalité. On peut de même transposer la notion de moyenne de M. von Neumann (²), et définir la presque loxodromicité par rapport à un groupe.

3. Abordons un cas moins lié aux fonctions presque périodiques. Nous dirons qu'une fonction continue est du type p. p. l. si, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe simultanément une longueur l et un nombre N, tels que dans tout intervalle de longueur l existe un nombre β et dans tout intervalle (u, Nu) existe un nombre α tels que

$$|f(\alpha x+\beta)-f(x)|<\varepsilon$$

pour toute valeur réelle de x.

Ces fonctions sont voisines de celles du type loxodromique. Elles admettent un théorème de la moyenne : $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T\frac{f(x)}{x}\,dx$ existe. La démonstration peut s'obtenir en cherchant une borne de la valeur absolue de

$$\frac{1}{T^n}\int_1^{T^n}\frac{f(x)}{x}\,dx-\frac{N_n}{T^n}\int_1^T f(x)\,dx;$$

on considère la première intégrale comme somme d'intégrales de la forme $\int_{T^h}^{T^{h+1}}$ où l'on effectue le changement de variable $x=\alpha y+\beta$, avec $T^h<\beta<T^h+l$ et $T^h<\alpha<NT^h$; on termine en utilisant le critère de Cauchy comme pour les fonctions presque périodiques (³).

4. Signalons encore la définition des fonctions associées $F(x)$ telles que $|F(\alpha x+\beta)-f(x)|<\varepsilon$, où $f(x)$ est *donnée* et où α et β sont soumis à des conditions du type indiqué ; ces fonctions admettent en particulier un théorème de la moyenne : $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1\frac{F(x)}{x}\,dx$ existe. Leur emploi permet de démontrer un autre théorème de la moyenne pour les fonctions $f(x)$ telles que

$$\left|f\left(\frac{1}{\alpha x+\beta}\right)-f(x)\right|<\varepsilon,$$

les conditions relatives à α et β étant les mêmes que plus haut. Ce théorème concerne $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_1^T\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{x}\,dx$ dont l'existence est immédiate.

(³) Par exemple, FAVARD, *Leçons sur les fonctions presque périodiques*, Paris.

(²) *Trans. of the American. Math. Society*, 36, 1934, p. 445-491 ; VON NEUMANN et BOCHNER, *Trans.*, 37, 1935, p. 21-49.

GÉOMÉTRIE. — *Sur de nouveaux points du tétraèdre.* Note (*) de M. VICTOR THÉBAULT, présentée par M. Élie Cartan.

Notations. — Suivant l'usage, on désignera par a, a', b, b', c, c' les arêtes BC, DA, CA, DB, AB, DC, par A, B, C, D les aires des faces BCD, CDA, DAB, ABC d'un tétraèdre $T \equiv ABCD$ et nous n'utiliserons que les coordonnées barycentriques.

1. Le point N de coordonnées

$$b'+c'+a,\quad c'+a'+b,\quad a'+b'+c,\quad a+b+c$$

coïncide avec le symétrique, par rapport au centre de gravité G de T, du barycentre des arêtes, de cordonnées

(1) $$b+c+a',\quad c+a+b',\quad a+b+c'\quad a'+b'+c'.$$

L'anticomplémentaire N_1 de N a pour coordonnées

$$[2(b+c+a')-(b'+c'+a)],\ \ldots,$$

et celles de son réciproque N_2 sont inversement proportionnelles aux coordonnées de N_1. Le point N_2 coïncide donc aussi avec le pôle harmonique du plan radical de la sphère circonscrite (O) au tétraèdre T et de la sphère (ω), pour laquelle les puissances des sommets A, B, C, D sont proportionnelles aux quantités (1). On pourrait appeler N_2 *second* point de Gergonne de T, un *premier* point ayant déjà été défini par M. R. Bouvaist ([1]).

Si le tétraèdre T est circonscriptible par les arêtes, $a+a'=b+b'=c+c'$, et N_2 se confond avec le point de concours des droites qui unissent les sommets aux points de Gergonne des faces opposées.

2. Nous avons nommé *premier* point de Lemoine du tétraèdre T le point K de coordonnées A^2, B^2, C^2, D^2 ([2]) et *second* point de Lemoine le point L de coordonnées $ab'c'$, $bc'a'$, $ca'b'$, abc ([3]). Nous proposons d'appeler *troisième* point de Lemoine le point J de coordonnées

$$b'^2+c'^2+a^2,\quad c'^2+a'^2+b^2,\quad a'^2+b'^2+c^2,\quad a^2+b^2+c^2,$$

qui coïncide avec le symétrique, par rapport au point G, du barycentre des carrés des arêtes, de coordonnées

(2) $$b^2+c^2+a'^2,\quad c^2+a^2+b'^2,\quad a^2+b^2+c'^2,\quad a'^2+b'^2+c'^2.$$

(*) Séance du 11 octobre 1948.

([1]) *Mathesis*, 54, Supplément, p. 19.

([2]) SIMON LHUILLIER, *Élément d'Analyse*, p. 297.

([3]) V. THÉBAULT, *Annales de la Soc. Scient. de Bruxelles*, 1922, p. 173.

L'anticomplémentaire J_1 de J ayant pour coordonnées

$$[2(b^2+c^2+a'^2)-(b'^2+c'^2+a^2)], \quad \ldots,$$

son réciproque J_2 se confond, si le tétraèdre T est *orthocentrique*, avec l'orthocentre H de celui-ci.

Dans le tétraèdre général, J_2 correspond donc à l'orthocentre du tétraèdre orthocentrique.

D'autre part, J_2 coïncide aussi avec le pôle harmonique du plan radical de la sphère (O) et de la sphère (ω), pour laquelle les puissances des sommets A, B, C, D sont proportionnelles aux quantités (2), c'est-à-dire avec le pôle harmonique du symétrique par rapport au point G, du plan radical de (O) et de la sphère des douze points de T que nous avons défini [4].

Lorsque T est *orthocentrique*, $J_2 \equiv H$ coïncide avec le pôle harmonique du symétrique, par rapport au point G, du plan radical de (O) et de la *seconde* sphère des douze points (*plan orthique*.) A ces différents points de vue, l'analogie entre le triangle et le tétraèdre est donc complète.

3. Complément a une précédente note. Théorème. — *Dans un tétraèdre* T, *le point* Ω *de Monge coïncide avec le centre radical des sphères orthocentroïdales des tétraèdres* $Ta \equiv \Omega BCD$, $Tb \equiv \Omega CDA$, $Tc \equiv \Omega DAB$, $Td \equiv \Omega ABC$ [5].

Cette proposition est un cas particulier de la suivante où nous conservons les mêmes notations.

Théorème. — *Dans un tétraèdre* T, *le centre radical des sphères* (ω_i), $(i = a, b, c, d)$, *pour lesquelles les puissances des sommets des tétraèdres* Ti *soient égales à* k *fois le double de la somme des carrés des arêtes aboutissant à ces sommets diminué de la somme des carrés des arêtes des faces opposées, se confond avec le point* Ω *de Monge*.

En particulier, si $k = 1/6$, les sphères (ω_i) sont les sphères de Longchamps des tétraèdres complémentaires de Ti. Lorsque $k = 1/8$, on retrouve le théorème prérappelé. Enfin, quand $k = 1/9$, les sphères (ω_i) sont les sphères des douze points des tétraèdres Ti.

GÉOMÉTRIE. — *Sur le rayon d'une sphère dont la surface contient une courbe fermée*. Note de MM. **Heinz Rutishauser** et **Hans Samelson**, présentée par M. Paul Montel.

1. On doit à W. Fenchel le théorème suivant [1] :

Toute courbe fermée située sur une sphère et plus courte que l'équateur est contenue dans un hémisphère ouvert.

---

[4] *Comptes rendus du Congrès International* (Oslo), 1936, p. 142.

[5] *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1615.

[1] *Math. Annalen*, **101**, 1929, p. 238-252, en particulier le théorème I'.

Récemment, H. Rutishauser a précisé ce résultat en établissant le :

THÉORÈME. — *Soit C une courbe fermée située sur la sphère unité S_n de l'espace euclidien R^{n+1} à $n+1$ dimensions, de longueur $L(C) = L < 2\pi$.*

Alors il existe un point $m \in S_n$ dont la distance sphérique $\overline{mx}$ à tout point x de C soit $\leq L/4$.

Une proposition analogue vaut pour les courbes fermées de longueurs quelconques L de l'espace euclidien ou hyperbolique à n dimensions (*cf.* n° 5).

Nous donnons ci-dessous une brève démonstration de ce théorème, due à H. Samelson, qui du reste n'utilise pas le théorème de Fenchel.

2. Nous désignons par $\overline{ab}$ la distance sphérique de deux points a, b de S_n; si $\overline{ab} < \pi$, nous appelons *centre* de la paire (a, b) le point m (unique) vérifiant $\overline{am} = \overline{bm} = (1/2)\,\overline{ab}$.

LEMME. — *Soient a, b deux points de S_n tels que $\overline{ab} < \pi$, m leur centre, $x \in S_n$ pour lequel $2\overline{mx} < \pi$. On a alors*

$$2\overline{mx} \leq \overline{ax} + \overline{bx}. \tag{1}$$

Démonstration. — Soit x' le symétrique de x par rapport à m, c'est-à-dire le point de S_n formant avec x une paire dont m est le centre; on a $\overline{x'a} = \overline{xb}$ et, puisque $2\overline{mx} < \pi$, $\overline{x'x} = \overline{x'm} + \overline{mx} = 2\overline{mx}$. L'inégalité du triangle entraîne

$$2\overline{mx} = \overline{x'x} \leq \overline{x'a} + \overline{ax} = \overline{ax} + \overline{xb}.$$

3. Soient C une courbe satisfaisant aux hypothèses du théorème (n° 1), a et b deux points divisant C en deux arcs (ab) et (ba) de même longueur $L(ab) = L(ba) = (1/2)L$; de $\overline{ab} \leq L(ab)$ et $L < 2\pi$ on tire $\overline{ab} < \pi$; le centre m de la paire (a, b) est alors défini et nous voulons montrer qu'il vérifie la conclusion du théorème.

Considérons pour cela un point $x \in C$ et admettons tout d'abord que $2\overline{mx} < \pi$, ce qui permet d'appliquer l'inégalité (1) du lemme; supposons, pour fixer les idées, x sur l'arc (ab). Les longueurs des arcs (ax) et (xb) déterminés sur (ab) par x sont soumises aux relations :

$$L(ax) \geq \overline{ax}, \qquad L(xb) \geq \overline{xb}, \qquad L(ax) + L(xb) = L(ab) = \frac{1}{2}L, \tag{2}$$

qui, jointes à (1), donnent $\overline{mx} \leq (1/4)L$.

Ainsi, on voit que la fonction $\overline{mx}$, $(x \in C)$, ne prend aucune valeur de l'intervalle ouvert $(L/4, \pi/2)$; comme elle est continue et que C est connexe, on doit avoir, soit $\overline{mx} \leq L/4$ pour tout $x \in C$, soit $2\overline{mx} \geq \pi$ pour tout $x \in C$; le deuxième cas est exclu puisque $2\overline{ma} = \overline{ab} < \pi$, ce qui démontre le théorème.

4. On peut même en général trouver un point m tel que $\overline{mx} < L/4$ (pas seulement $\leq L/4$) pour tout $x \in C$; plus précisément, nous affirmons qu'*il*

n'existe pas de tel point m si et seulement si C se compose d'un arc de grand cercle de longueur L/2 parcouru dans les deux sens.

Nous reprenons les notations des n°s 2 et 3; s'il se trouve un point m pour lequel $\overline{mx} = L/4$, les trois inégalités figurant dans (1) et (2) sont remplacées par des égalités. On déduit alors de (2) que les arcs (ax) et (xb) sont des arcs de grand cercle, et de (1), que $\overline{x'x} = \overline{x'a} + \overline{ax}$; a et b sont donc sur l'arc de grand cercle déterminé par x et x'; ainsi, une des moitiés (ab) au moins de la courbe C se compose de deux arcs (ax) et (xb) du même grand cercle d'où l'on déduit aisément notre proposition.

5. Nous n'avons utilisé que très incomplètement les propriétés de S_n et notre théorème vaut dans des espaces plus généraux. Soit M un espace métrique auquel on peut attacher un nombre positif r jouissant des propriétés suivantes : α. toute paire de points (a, b) pour laquelle $ab < r$ a exactement un centre m, c'est-à-dire un point vérifiant $am = bm = (1/2)ab$; β. pour tout $m \in M$, la boule ouverte de centre m et de rayon $r/2$ admet une isométrie involutive sur elle-même qui échange deux points si, et seulement si m est leur centre. A la place de la *longueur d'un arc de courbe*, il nous suffit d'avoir une fonctionnelle additive définie sur une certaine classe de courbes, qui soit continue dans un sens facile à préciser, et dont la valeur soit pour chaque arc de courbe au moins égale à la distance de ses extrémités. Le théorème du n° 1 et sa démonstration donnée aux n°s 2 et 3 restent alors valables sans aucun changement pour toutes les courbes fermées C de M dont les longueurs sont $< 2r$. Il en est de même pour le complément (n° 4), si l'on ajoute des hypothèses appropriées sur l'existence et l'unicité des lignes géodésiques.

En particulier, M pourra être l'espace euclidien ou hyperbolique à n dimensions (avec r infini), ou plus généralement, un espace de Riemann symétrique au sens de E. Cartan.

CINÉMATIQUE. — *Généralisation de la formule de Cauchy et des théorèmes de Helmholtz au mouvement d'un milieu continu quelconque.* Note (*) de **M. Clifford Truesdell**, transmise par M. Henri Villat.

Soient dans le mouvement d'un milieu continu : x_i les coordonnées eulériennes, x_α les coordonnées lagrangiennes, $\dot{x}_i$ les composantes de la vitesse, $\ddot{x}_i$ les composantes de l'accélération, ξ_i les composantes du vecteur tourbillon ($\xi_i = -e_{ijk}\dot{x}_{j,k}$) et ρ la densité. Dans tout mouvement dans lequel la circulation autour de chaque contour fluide fermé reste constante, on a [1], avec les

(*) Séance du 4 octobre 1948.

[1] Cauchy, *Œuvres*, 1re série, 1, p. 5-318 (*voir* 1re Partie, 1re Section, § 4); Stokes, *Math. and Phys. Papers*, 2, p. 36-50.

hypothèses usuelles de continuité,

$$(1) \qquad \frac{\xi_i}{\rho} = x_{i,\alpha} \frac{\overset{\circ}{\xi}_\alpha}{\rho_0},$$

où les $\overset{\circ}{\xi}_i$ sont les valeurs des ξ_i et ρ_0 est la valeur de ρ à l'instant $t = t_0$.

Dans un tel mouvement, on dit que le vecteur tourbillon n'est changé que par la *convection*. Pour tout autre mouvement, le vecteur tourbillon est aussi changé par la *diffusion*. Afin de faire une nette distinction entre la convection et la diffusion, nous déduirons une formule cinématique générale pour le vecteur tourbillon dans un milieu quelconque.

On a l'équation différentielle bien connue pour ξ_i/ρ

$$(2) \qquad \frac{D}{Dt}\left(\frac{\xi_i}{\rho}\right) = v_{i,j}\frac{\xi_j}{\rho} - \frac{1}{\rho} e_{ijk}\ddot{x}_{j,k},$$

où D/Dt représente la différentiation *matérielle*. Comme $x_{i,\alpha} x_{\alpha,j} = \delta_{ij}$, on trouve $D(x_{\alpha,j})/Dt = -x_{\alpha,i}\dot{x}_{i,j}$. De l'équation (2) on a donc

$$(3) \qquad \frac{D}{Dt}\left(\frac{\xi_i}{\rho} x_{\alpha,i}\right) = -\frac{1}{\rho} e_{ijk}\ddot{x}_{j,k} x_{\alpha,i}.$$

Intégrant de t_0 à t et multipliant ensuite par $x_{j,\alpha}$, on trouve la formule désirée

$$(4) \qquad \frac{\xi_i}{\rho} = \left[\frac{\overset{\circ}{\xi}_\alpha}{\rho_0} - \int_{t_0}^{t} \frac{e_{ljk}\ddot{x}_{j,k} x_{\alpha,l}}{\rho}\, dt\right] x_{i,\alpha},$$

$$(5) \qquad \frac{\xi_i}{\rho} = \left[\frac{\overset{\circ}{\xi}_\alpha}{\rho_0} - \frac{1}{2\rho_0}\int_{t_0}^{t} e_{ljk}\, e_{\alpha\beta\gamma}\, e_{lmn}\ddot{x}_{j,k} x_{m,\beta} x_{n,\gamma}\, dt\right] x_{i,\alpha},$$

$$(6) \qquad \frac{\xi_i}{\rho} = \left[\frac{\overset{\circ}{\xi}_\alpha}{\rho_0} - \frac{1}{\rho_0}\int_{t_0}^{t} e_{\alpha\beta\gamma}(\ddot{x}_j x_{j,\beta})_{,\gamma}\, dt\right] x_{i,\alpha}.$$

L'une des deux conditions

$$(7) \qquad e_{ijk}\ddot{x}_{j,k} = 0, \qquad e_{\alpha\beta\gamma}(\ddot{x}_j x_{j,\beta})_{,\gamma} = 0$$

est nécessaire et suffisante pour que la circulation autour de chaque contour fluide fermé reste constante. De l'une des équations (7) et de (4) ou (6) on retrouve l'équation (1).

Dans le cas général le vecteur tourbillon transporté par convection est le premier terme de (6), et le vecteur tourbillon diffusé est le second terme. Le vecteur tourbillon transporté par convection ne dépend que de la valeur initiale $\overset{\circ}{\xi}_\alpha$ et du déplacement relatif d'un petit domaine autour de la particule x_α, autrement dit des $x_{i,\alpha}$. La convection est donc indépendante de tout changement temporel et des trajectoires des particules, étant complètement déterminée par les déplacements relatifs des particules à l'instant donné. Soient deux mouvements distincts $x_i = f_i(x_\alpha, t)$, $x_i = g_i(x_\alpha, t)$, tels qu'à un instant particulier t_1 on ait $f_i(x_\alpha, t_1) = g_i(x_\alpha, t_1)$. Si les $\overset{\circ}{\xi}_\alpha$ ont les mêmes valeurs dans

les deux cas, les composantes du vecteur tourbillon transporté par convection ont aussi les mêmes valeurs pour les deux mouvements, bien que leurs histoires intermédiaires soient tout à fait différentes. Au contraire, le vecteur tourbillon diffusé résulte de l'effet des composantes $e_{\alpha\beta\gamma}(\ddot{x}_j x_{j,\beta})_{,\gamma}$ que la particule rencontre le long de sa trajectoire, et par conséquent dépend essentiellement de l'histoire du mouvement. Des modèles spéciaux des milieux continus, comme par exemple des corps parfaitement élastiques ou des fluides visqueux, se définissent par une forme spéciale de la dépendance fonctionnelle de l'accélération $\ddot{x}_i$ des autres variables. Donc le mécanisme de la diffusion diffère d'un modèle à l'autre, quoique celui de la convection soit absolument le même pour tous les modèles.

On sait ([2]) que les théorèmes de Helmholtz sont des conséquences de (1). De (6), on peut en construire des généralisations. Soient dx_i des différentielles le long d'une courbe fluide. On a donc

$$(8)\qquad e_{ijk}\,dx_j\frac{\xi_k}{\rho}=e_{ijk}x_{j,\alpha}\,dx_\alpha\left[\frac{\xi_\beta}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_0}\int_{t_0}^{t}e_{\alpha\beta\gamma}(\ddot{x}_m,\,x_{m,\beta})_{,\gamma}\,dt\right]x_{i,\alpha}$$
$$=\left(e_{\alpha\beta\gamma}\,dx_\beta\left[\frac{\xi_\beta}{\rho_0}-\frac{1}{\rho_0}\int_{t_0}^{t}\cdots\right]\right)\left(\frac{1}{2}e_{\alpha\lambda\delta}e_{ijk}x_{j,\lambda}x_{k,\delta}\right).$$

Si la courbe fluide est une ligne tourbillonnaire à l'instant t_0, on a $e_{\alpha\beta\gamma}dx_\beta\xi_\gamma=0$. De l'équation (8) on tire la conclusion que, pour que la courbe fluide revienne à l'état de ligne tourbillonnaire à l'instant t (sans l'être nécessairement durant l'intervalle $t-t_0$), il est nécessaire et suffisant que l'effet de la diffusion soit nul $\int_{t_0}^{t}e_{\alpha\beta\gamma}(\ddot{x}_m x_{m,\beta})_{,\gamma}\,dt=0$. Soient dS_i les composantes d'un élément d'aire d'une surface fluide. On peut démontrer que

$$(9)\qquad \xi_i\,dS_i=\left[\xi_\alpha-\int_{t_0}^{t}e_{\alpha\beta\gamma}(\ddot{x}_m x_{m,\beta})_{,\gamma}\,dt\right]dS_\alpha.$$

Donc l'effet de la diffusion peut être expliqué comme suit : soient deux mouvements distincts $x_i=f_i(x_\alpha,t)$, $x_i=g_i(x_\alpha,t)$, tels qu'à un instant donné t on ait $f_i(x_\alpha,t)=g_i(x_\alpha,t)$. De l'équation $x_i=f_i(x_\alpha,t)$ du premier mouvement, dans lequel $\xi_i=\xi_\alpha$ à l'instant t_0, nous calculons $\xi'_\alpha\equiv-\int_{t_0}^{t}e_{\alpha\beta\gamma}(\ddot{x}_m x_{m,\beta})_{,\gamma}\,dt$. Soit le second mouvement sans diffusion, mais à l'instant t_0 soient $\xi_\alpha+\xi'_\alpha$ les composantes de son vecteur tourbillon. Donc à l'instant t les vecteurs tourbillons des deux mouvements sont égaux. Ainsi pour un mouvement quelconque pendant chaque intervalle du temps il existe dans le même intervalle un mouvement équivalent dans lequel il n'y a que la convection.

([2]) KIRCHHOFF, *Vorlesungen über Math. Physik: Mechanik*, 2e éd., Leipzig, 1877, ch. 15, § 3. STOKES, *Math. et Phys. Papers*, 2, Cambridge, 1883, p. 36-50, voir note à la fin.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Le tenseur spectral de la turbulence homogène non isotrope dans un fluide incompressible.* Note (*) de M. **Joseph Kampé de Fériet**, transmise par M. Henri Villat.

I. Les résultats les plus importants de la théorie statistique de la turbulence supposent toujours celle-ci *homogène et isotrope*; ils sont basés sur le *tenseur de corrélation* $R_{j,k}(h)$ de Karman ([1]). On obtient un instrument analytique plus souple en substituant à $R_{j,k}(h)$ le tenseur $\varphi_{j,k}(\lambda)$, que l'on pourrait appeler le *tenseur spectral*, dont les composantes sont les transformées de Fourier du précédent; la facilité des calculs avec ce nouveau tenseur est telle qu'il n'y a plus aucune raison de maintenir la condition restrictive de l'isotropie. *La cinématique de la turbulence homogène est alors basée sur l'analyse harmonique des fonctions stationnaires* que, dans le cas actuel, on peut interpréter comme des fonctions aléatoires définies sur le groupe des translations d'un espace euclidien ([2]).

II. A un instant donné t, les trois composantes u_j de la vitesse en un point du fluide sont des fonctions aléatoires stationnaires, continues en moyenne, des coordonnées x_j ([3])

$$\overline{u_j(x)}=0, \qquad \overline{u_j(x')\,u_k(x)}=R_{j,k}(h), \qquad h_j=x'_j-x_j \qquad (j=1, 2, 3).$$

En supposant le spectre de la turbulence absolument continu, la correspondance entre le tenseur de corrélation et le tenseur spectral est définie par

$$R_{j,k}(h)=\overline{u_j(x')\,u_k^{\star}(x)}=\int_{\Lambda} e^{i\lambda h}\varphi_{j,k}(\lambda)\,d\lambda$$

($\lambda h=\lambda_1 h_1+\lambda_2 h_2+\lambda_3 h_3$, $d\lambda=d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3$), l'intégrale étant étendue à tout l'espace Λ des fréquences : $-\infty<\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3<+\infty$. Le tenseur spectral n'est assujetti qu'à une seule condition : $\sum_{k,j} X_j X_k^{\star}\varphi_{j,k}(\lambda)\geqq 0$, quels que soient les X_j; d'où la symétrie hermitienne

$$\varphi_{j,k}(\lambda)=\varphi_{k,j}^{\star}(\lambda); \qquad \varphi_{j,j}(\lambda)\geqq 0.$$

(*) Séance du 4 octobre 1948.

([1]) Th. von Karman et L. Howarth, *Proc. Roy. Soc. London*, A, **164**, 1938, p. 192.

([2]) J. Kampé de Fériet, *Fonctions aléatoires stationnaires et groupes de transformations dans un espace abstrait* (*Colloque International de Calcul de Probabilités*, Lyon, 28 juin-3 juillet 1948).

([3]) $u_j(x)$, $R_{j,k}(h)$, $\varphi_{j,k}(\lambda)$ sont des abréviations pour $u_j(x_1, x_2, x_3)$, $R_{j,k}(h_1, h_2, h_3)$, $\varphi_{j,k}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$; $z^{\star}$ désigne le nombre complexe conjugué de z; les composantes u_j sont évidemment réelles; mais, pour pouvoir employer les exponentielles complexes, beaucoup plus souples, il y a intérêt à conserver l'expression générale des covariances pour des u complexes. On obtient des u_j réelles comme cas particulier, en imposant aux $\varphi_{j,k}$ des conditions de symétrie, qui reviennent à ne considérer que les valeurs positives des fréquences λ_j.

L'incompressibilité du fluide se traduit par les 6 équations

$$\sum_j \lambda_j \varphi_{j,k} = 0 \quad (k = 1, 2, 3); \qquad \sum_k \lambda_k \varphi_{j,k} = 0 \quad (j = 1, 2, 3).$$

Il en résulte que, pour un fluide incompressible, le tenseur spectral a comme forme générale

$$\varphi_{j,k} = f_j f_k^* + \left(\delta_{j,k} - \frac{\lambda_j \lambda_k}{\mu^2}\right) g \qquad (\mu^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2),$$

où $\delta_{j,k}$ désigne le tenseur unité, $g(\lambda)$ une fonction scalaire arbitraire réelle positive, $f_j(\lambda)$ les 3 composantes d'un vecteur arbitraire complexe, normal au vecteur fréquence : $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. L'isotropie correspond au cas particulier $f_j = 0$, $g = g(\mu)$; cette fonction est liée au coefficient de corrélation $f(r)$ de Karman par

$$g(\mu) = \frac{1}{4\pi}\left[\theta''(\mu) - \frac{1}{\mu}\theta(\mu)\right], \qquad \theta(\mu) = \frac{u'^2}{\pi}\int_0^\infty f(r)\cos\mu r\, dr.$$

III. En introduisant de même le tenseur spectral $\psi_{j,k}$ du tourbillon $\omega_j(x)$

$$4\overline{\omega_j(x')\,\omega_k^*(x)} = \int_\Lambda e^{i\lambda_j h_j}\psi_{j,k}(\lambda)\, d\lambda,$$

les deux tenseurs spectraux sont liés par les relations simples

$$\psi_{j,k} = -\mu^2\varphi_{j,k} + (\delta_{j,k}\mu^2 - \lambda_j\lambda_k)\varphi, \qquad \varphi = \sum_j \varphi_{j,j},$$

$$\mu^4\varphi_{j,k} = -\mu^2\psi_{j,k} + (\delta_{j,k}\mu^2 - \lambda_j\lambda_k)\psi, \qquad \psi = \sum_j \psi_{j,j} = \mu^2\varphi.$$

Les valeurs moyennes des énergies cinétique et tourbillonnaire (par unité de masse) ont pour expression

$$2\overline{E} = \int_\Lambda \varphi\, d\lambda, \qquad 4\overline{\omega^2} = \int_\Lambda \mu^2\varphi\, d\lambda.$$

On peut donc écrire $\overline{E} = 2\overline{\omega^2} : l^2$, la grandeur l ayant les dimensions d'une longueur, qui ne dépend que de l'invariant φ du tenseur spectral

$$l^2 = \int_\Lambda \varphi\, d\lambda : \int_\Lambda \mu^2\varphi\, d\lambda.$$

On a, d'autre part, le signe négatif ayant une interprétation physique intéressante dans les problèmes concernant la diffusion du tourbillon

$$4\sum_j \overline{\omega_j\,\Delta\omega_j} = -\int_\Lambda \mu^4\varphi\, d\lambda.$$

RELATIVITÉ. — *Képler et les formules de Lorentz.* Note (*) de M. **Gérard Kowalewski**, présentée par M. Élie Cartan.

Képler a simplifié le calcul des éphémérides en introduisant les deux anomalies, anomalie vraie v et anomalie excentrique u. De la figure qui représente l'affinité entre l'ellipse et son cercle circonscrit il tire les équations

$$r\cos v = a(\cos u - \varepsilon), \qquad r\sin v = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u,$$

qui lui donnent par addition des carrés

$$r = a(1 - \varepsilon\cos u).$$

De là il obtient les formules fondamentales

$$\cos v = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos u}, \qquad \sin v = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u}{1 - \varepsilon\cos u},$$

qui donnent v en fonction de t après avoir calculé u au moyen de son équation $u - \varepsilon \sin u = 2\pi t/\tau$, qui exprime son célèbre théorème des aires.

Quand on pose $\cos u = x$, $\sin u = y$, $\cos v = x_1$, $\sin v = y_1$, les formules fondamentales de Képler se présenteront sous cette forme

$$(\mathcal{F}_\varepsilon) \qquad x_1 = \frac{x - \varepsilon}{1 - \varepsilon x}, \qquad y_1 = \frac{y\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1 - \varepsilon x}.$$

Faisant varier ε entre 0 et 1 on obtiendra ∞^1 transformations projectives $\mathcal{F}_\varepsilon$, qui forment un groupe, qu'on devrait appeler le *groupe képlérien.* Signalons en passant qu'au moyen de ces transformations képlériennes $\mathcal{F}_\varepsilon$ on peut édifier le groupe des mouvements de Lobatschewskij, au moins la branche principale de ce groupe, sous la forme $\mathcal{E}_\alpha \mathcal{F}_\varepsilon \mathcal{E}_\beta$, en désignant par $\mathcal{E}_\varphi$ la rotation euclidienne d'angle φ autour de l'origine. Remarquons encore que $\mathcal{F}_{\varepsilon_1}$ et $\mathcal{F}_{\varepsilon_2}$ donnent le produit $\mathcal{F}_{\varepsilon_3}$ avec

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

En posant $\varepsilon_i = (v_i/c)$ on aura la règle d'addition des vitesses de la mécanique einsteinienne. Quand on introduit $\alpha = \operatorname{arcth}\varepsilon$, ce nouveau paramètre sera additif.

Écrivons $\mathcal{F}_\varepsilon$ sous forme homogène. Nous obtiendrons

$$x_1 = \frac{x - \varepsilon z}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \qquad y_1 = y, \qquad z_1 = \frac{z - \varepsilon x}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

En tenant compte seulement des x, z et posant $z = \text{const.}$, $\varepsilon = (v/c)$, on aura

(*) Séance du 4 octobre 1948.

immédiatement les formules de Lorentz

$$x_1 = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad t_1 = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

On pourra donc dire, que Képler a eu sous ses mains ces célèbres formules.

THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE. — *Le calcul de la pression thermodynamique dans un liquide quantique.* Note de M. **Jacques Yvon**, présentée par M. Louis de Broglie.

Il n'y a aucun doute que l'interprétation des propriétés de l'hélium liquide et notamment l'interprétation des phénomènes relatifs à l'hélium II relève de la mécanique et de la statistique quantique. H.-S. Green [1] a exprimé l'opinion que cette interprétation pourrait être particulièrement liée à l'expression complexe de la pression thermodynamique que M. Born et H.-S. Green [2] ont déduite de leur théorie quantique du liquide de Bose-Einstein. Avec leurs notations cette pression s'écrit

$$p = p_1 + p_3 + p_5 + \ldots.$$

C'est un développement en série dont le premier terme est

$$p_1 = n_1 kT - \frac{1}{6}\int n_2(r)\Phi'(r)r\,d\mathbf{r}.$$

Cette pression p_1 a la même expression formelle que la pression (au sens usuel) d'un liquide régi par les lois classiques, à cette différence près que dans la formule classique la température absolue T prend la place de la grandeur quantique T_1. Aux yeux de Born et Green, et ce point de vue paraît entièrement justifié, p_1 est la pression hydrostatique. L'essai d'interprétation de Green repose sur la distinction qu'il conviendrait donc de faire en théorie quantique entre la pression thermodynamique et la pression hydrostatique. Born et Green ont donné des pressions p_3, p_5, ... des expressions assez complexes qui ne sont pas faciles à discuter. Je vais indiquer ici comment il est possible de calculer p sans passer par l'intermédiaire de ces pressions p_3, ...

Le système, que je suppose enfermé dans un récipient cylindrique de volume V, d'axe parallèle à Ox, a un opérateur hamiltonien :

$$H = K + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j \Phi_{ij} + \sum_i \Phi_i.$$

---

(1) *Proc. Roy. Soc.*, A, 194, 1948, p. 244.

(2) *Proc. Roy. Soc.*, A, 191, 1947, p. 168.

Ici K est l'opérateur énergie cinétique, somme des trois termes K_{xx}, K_{yy}, K_{zz} relatifs respectivement aux axes Ox, Oy, Oz. Φ_{ij} est l'énergie intermoléculaire relative aux molécules i et j, fonction de la distance de leurs centres r_{ij} et Φ_i l'énergie répulsive intense exercée normalement par la paroi sur la molécule i lorsqu'elle se trouve dans son voisinage. Les fonctions propres viennent s'annuler sur la paroi. Nous utilisons encore le viriel intermoléculaire

$$J = J_{xx} + J_{yy} + J_{zz},$$

la composante J_{xx} ayant pour expression

$$J_{xx} = \frac{1}{2} \sum \sum (x_j - x_i) \left(\frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{2} \sum \sum (x_j - x_i)^2 r_{ij}^{-1} \left(\frac{d\Phi_{ij}}{dr_{ij}} \right).$$

Désignons enfin par E_n une valeur propre de l'énergie et par O_n l'élément de matrice diagonal correspondant à l'état stationnaire n et à l'opérateur O quelconques. Posons

$$\exp\left(-\frac{\Psi}{kT}\right) = \sum_n \exp\left(-\frac{E_n}{kT}\right), \qquad \Pi_n = \exp\left[\frac{(\Psi - E_n)}{kT}\right].$$

Il est facile de voir que p_1 n'est pas autre chose que

$$\frac{1}{3V} \Sigma \Pi_n (2 K_n + J_n),$$

ou, parce que le fluide est isotrope

$$p_1 = \frac{1}{V} \Sigma \Pi_n (2 K_{xxn} + J_{xxn}).$$

Quant à p, il est défini par la formule thermodynamique

$$p = -\frac{\partial \Psi}{\partial V},$$

qui s'explicite

$$p = -\sum \left(\frac{\partial E_n}{\partial V} \right) \Pi_n.$$

$\partial E_n / \partial V$ peut s'évaluer par la méthode de perturbation. On imagine que la variation de volume a lieu par une dilatation parallèle à Ox dans le rapport $1 + \lambda$ infiniment voisin de 1. Soit x'_i, y_i, z_i l'ensemble des coordonnées d'une molécule dans le volume dilaté. Posons

$$x'_i = (1 + \lambda) x_i,$$

et prenons comme variables indépendantes x_i, y_i, z_i. On s'aperçoit que la recherche des états quantiques du système de molécules dans le volume dilaté est la recherche des états quantiques définis dans le volume initial par l'opéra-

teur suivant :

$$H = \lambda(2 K_{xx} + J_{xx} + M),$$

M étant un terme qui résulte de l'effet du changement de variables et du déplacement de la paroi sur les Φ_i.

Alors

$$-V \frac{\partial E_n}{\partial V} = 2 K_{xxn} + J_{xxn} + M_n.$$

Mais il est facile de voir que la contribution des M_n est nulle par raison de symétrie. Il en résulte que $p = p_1$. La somme des termes complémentaires p_2, p_3, ... est nulle. On parvient à la conclusion assez claire que même dans un liquide quantique la pression thermodynamique égale la pression hydrostatique. Les raisonnements précédents n'apportent guère de soutien aux vues de Green sur la question. Ces raisonnements sont calqués sur ceux qui sont indiqués pour le traitement classique du même problème.

PHYSIQUE NUCLÉAIRE. — *Sur l'absorption de mésons lourds par le deutéron.* Note de MM. **Claude Marty** et **Jacques Prentki**, présentée par M. Frédéric Joliot.

La production artificielle de mésons lourds par le cyclotron de Berkeley permet d'envisager une étude précise de l'interaction de ces particules avec les noyaux. Un processus de capture semble spécialement digne d'intérêt : c'est l'absorption des mésons II par le deutéron, phénomène que l'on appellera mésodésintégration du deutéron. Du point de vue théorique, le deutéron est un noyau à peu près bien connu et l'on peut analyser le phénomène ci-dessus de façon plus exacte qu'il ne l'a été fait jusqu'à présent (1) pour d'autres nucléides. Sur le plan expérimental, la mésodésintégration du deutéron permet en principe l'établissement d'un bilan complet énergie-quantité de mouvement, puisque le neutron résultant de la dissociation du deutéron a une énergie et une quantité de mouvement (en valeur absolue) respectivement égales à celles du proton.

Le phénomène a été étudié théoriquement avec les hypothèses suivantes : *a*. mésons II de faible énergie cinétique; *b*. mésons II pseudo-scalaires ou vectoriels selon le formalisme des forces nucléaires de Moller-Rosenfeld (2); *c*. les fonctions d'onde du deutéron sont calculées selon la méthode de Kemmer (3) avec un potentiel d'interaction découlant du formalisme ci-dessus.

---

(1) Corben Massey, *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 35, 1939, p. 84; Heitler, *Proc. Roy. Soc.*, 166, 1938, p. 529; Yukawa-Okayama, *Scie. Pap. Inst. Phys. and Chem. Res.*, Tokyo, 36, 1939, p. 385.

(2) *Det. Kgl. Dansk. Vid. Selsk.*, XVII, fasc. 8, 1940.

(3) *Helv. Phys. Acta*, 10, 1937, p. 47.

La partie radiale de la fonction d'onde du deutéron, dans l'état initial, a été donnée par Hulthén ([4]). Dans l'état final, dont l'énergie est pratiquement égale à la masse au repos du méson incident, les nucléons peuvent être regardés comme libres, ce qui simplifie les fonctions d'onde radiales, mais nécessite l'introduction des corrections de relativité.

On étudie d'abord le phénomène nucléaire pur, sans tenir compte du champ de Coulomb : la section efficace d'absorption d'un méson libre d'énergie cinétique E_π est ($m_0 c^2$-masse au repos de l'électron)

$$\Phi = \left\{ a\sqrt{\frac{E_\pi}{m_0 c^2}} + b\sqrt{\frac{m_0 c^2}{E_\pi}} \right\} 10^{-29}\ \text{cm}^2, \tag{1}$$

$a = 2,9,$ $b = 7,4$ pour un méson pseudoscalaire,
$a = 0,$ $b = 8,6$ » vectoriel longitudinal,
$a = 2,9,$ $b = 8,6$ » » transversal.

L'influence du champ de Coulomb peut être estimée par la méthode d'Araki et Tomonaga ([5]). Pour un méson positif, la section efficace d'absorption devient négligeable et c'est la désintégration $\pi \to \mu$ qui a lieu. Pour un méson négatif la section efficace (1) est légèrement augmentée; mais on sait alors qu'on peut avoir une capture à partir d'une orbite stable (K en pratique). Le calcul donne pour la vie moyenne d'un méson π sur une couche K du deutéron

$$\tau_{ps} = 2 \,.\, 10^{-13}\ \text{sec}, \qquad \tau_{v} = 1,3 \,.\, 10^{-13}\ \text{sec}.$$

C'est pratiquement ce phénomène qui aura lieu, si toutefois le méson π est freiné assez vite, ce que l'on peut penser ([6]).

On ne peut exclure *a priori* la mésodésintégration due à une particule Π neutre, quoique ce dernier corpuscule paraisse sur le plan théorique très instable vis-à-vis de la décomposition en deux photons ([7]). Il faut mentionner que les calculs faits à ce propos ne sont pas absolument concluants puisqu'on a affaire à des intégrales divergentes qui nécessitent une coupure. Si le méson Π^0 est suffisamment stable, on peut penser que la mésodésintégration du deutéron est, *en principe*, un moyen pour mettre en évidence cette particule neutre. Expérimentalement on observerait dans ce phénomène un seul corpuscule ionisant, le proton projeté, dont l'énergie est de l'ordre de 75 Mev. Des processus parasites, comme les collisions $n - d$ fournissent aussi des protons projetés, mais la discrimination pourrait se faire à l'aide de sections efficaces différentielles $d\Phi(\theta)$ donnant les distributions angulaires. Le facteur

---

([4]) *Arkiv. f. Mat. Astr. och Fys.*, 28 A, fasc. 5, 1942; *ibid.*, 29 B, fasc. 1, 1942.

([5]) *Phys. Rev.*, 58, 1940, p. 90.

([6]) Fermi, Teller et Weisskopf, *Phys. Rev.*, 71, 1947, p. 314; Fermi, Teller, *Phys. Rev.*, 72, 1947, p. 399.

([7]) Finkelstein, *Phys. Rev.*, 72, 1947, p. 415.

d'asymétrie $d\Phi(\pi)/d\Phi(\pi/2)$ est compris entre 0,8 et 1,5 dans le cas de la mésodésintégration, tandis qu'il est vraisemblablement voisin de 3 pour les collisions $n - p$ [8]. Notons enfin qu'il est difficile de conclure à partir d'expériences de ce type quant au spin du méson neutre incident.

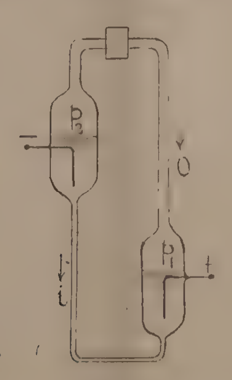
CHIMIE PHYSIQUE. — *La force électromotrice de la pile de concentration à oxygène et la thermodynamique*. Note (*) de M. **Vasilesco Karpen**, présentée par M. Aimé Cotton.

La formule, admise sans contestation, pour la force électromotrice d'une pile de concentration à oxygène, est

$$(1) \qquad E = \frac{RT}{4} ln \frac{C_1}{C_2} = \frac{RT}{4} ln \frac{p_1}{p_2},$$

C_1, C_2, p_1, p_2, concentrations du gaz aux électrodes et pressions extérieures respectives. La formule a été établie par la théorie cinétique de Nernst, fondée principalement sur deux hypothèses : celle de la pression de dissolution des métaux et celle de l'électrode gazeuse. Ces hypothèses peuvent ne pas correspondre à une réalité, mais la force électromotrice de la pile à oxygène peut être établie à l'aide des principes de la thermodynamique.

Considérons, en effet, une pareille pile (*fig.*), où la différence des pressions



du gaz, $p_1 - p_2$, est compensée par une différence de niveau. Laissons passer, à température constante, un coulomb avec un très faible courant, en recueillant l'énergie E, entièrement empruntée au milieu ambiant; en même temps un équivalent électrochimique d'oxygène de pression p_1 disparaît à l'électrode positive et apparaît, sous la pression p_2, à l'électrode négative.

Ramenons ensuite le système à l'état initial, en comprimant à température

(8) Hadley, *Phys. Rev.*, 73, 1948, p. 1114.

(*) Séance du 27 septembre 1948.

constante, l'équivalent d'oxygène de la pression p_2 à p_1 et en dépensant le travail

$$\mathfrak{T} = \frac{RT}{4} \ln \frac{p_1}{p_2},$$

entièrement transformé en chaleur cédée au milieu ambiant.

Suivant le second principe, on doit avoir nécessairement,

$$(3) \qquad E \leq \mathfrak{T} = \frac{RT}{4} \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Car si E était plus grand que $\mathfrak{T}$, on pourrait obtenir une énergie sans autre changement du système qu'un échange de chaleur avec le milieu ambiant.

L'expérience contredit les formules (1) et (2), en montrant que la force électromotrice mesurée, d'une pile à oxygène, est environ 6,3 fois plus grande que celle donnée par ces formules.

Deux éprouvettes de 3^cm^ diam. et 17^cm^ long., reliées à la partie inférieure par un tube capillaire, sont remplies d'une solution d'acide sulfurique. Les électrodes sont des spirales en fil de platine platiné de 0^mm^,4. On fait barboter de l'air dans l'une des éprouvettes, de l'oxygène dans l'autre en la bouchant incomplètement, de façon à permettre la sortie du gaz tout en maintenant au-dessus de l'électrolyte la pression d'une atmosphère d'oxygène. On obtient ainsi une pile de concentration à oxygène, avec $p_1 = 1^{atm}$ et $p_2 = \frac{1}{4,8}$ atm (proportion de l'oxygène dans l'air), dont la force électromotrice suivant les formules (1) ou (2), devrait être

$$E = \frac{0,025}{4} \ln 4,8 = 0,0098 \text{ V}.$$

En réalité on obtient, avec l'eau distillée et les solutions à 1% d'acide et 5% d'acide (en volumes), respectivement

$$0,066 \text{ V}; \qquad 0,062 \text{ V}; \qquad 0,062 \text{ V}.$$

Les mesures sont faites quand le barbotement a cessé (l'éprouvette à oxygène complètement fermée), et que la force électromotrice, après avoir monté de plus en plus lentement, arrive à une valeur stationnaire.

Les rapports entre les forces électromotrices mesurées et la force électromotrice théorique sont donc respectivement : 6,7; 6,3; 6,3.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Nouvelles méthodes d'extraction des substances solides par les solvants.* Note (*) de M. LÉON JACQUÉ, présentée par M. Pierre Jolibois.

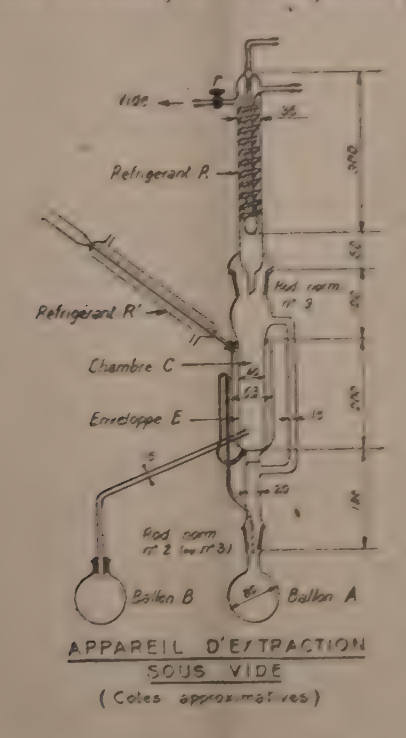
Au cours de recherches sur les constituants des résines phénoplastes, j'ai été conduit à apporter aux procédés classiques d'extraction plusieurs modifications, dont les buts essentiels sont d'éviter l'altération par la chaleur et

(*) Séance du 4 octobre 1948.

d'obtenir un fractionnement efficace et fidèle. Ces méthodes peuvent être généralisées pour d'autres substances thermiquement fragiles.

Le solvant sélectif approprié est employé à une température définie, inférieure à sa température d'ébullition sous la pression ordinaire et suffisamment basse pour éviter toute altération. L'appareil d'extraction fonctionne sous un vide réglé d'avance, de manière à ce que la température dans le bouilleur ne soit que très légèrement supérieure à la température d'extraction. Celle-ci peut être réglée à une valeur précise par condensation des vapeurs d'un liquide auxiliaire dans une double enveloppe entourant la chambre d'extraction; pour les applications industrielles, cette condensation pourra aussi se faire dans un faisceau tubulaire traversant la chambre. La température de condensation est déterminée par le choix du liquide auxiliaire et, si besoin est, par l'emploi du vide.

On pourra ainsi, dans bien des cas, éviter toute surchauffe de la substance traitée susceptible de l'altérer, tout en conservant une certaine latitude quant à la structure chimique des solvants mis en œuvre. On peut, en outre, éviter l'altération des substances traitées par l'atmosphère (oxydation), en faisant



APPAREIL D'EXTRACTION SOUS VIDE
(Cotes approximatives)

préalablement le vide dans l'appareil et en y admettant un gaz inerte jusqu'à la pression désirée.

La figure donne un exemple de réalisation de l'appareillage de laboratoire. Une étanchéité satisfaisante est obtenue en enduisant légèrement de

graphite (sans graisse), les deux rodages normalisés et le robinet r; ce dernier reste fermé dès que le vide est réglé à la valeur prévue.

Un dispositif simplifié consiste en un appareil de Kumagawa pouvant tenir le vide; le réglage de la température d'extraction y est moins précis.

Il est évidemment avantageux de traiter la substance à extraire sous forme assez divisée; lorsqu'elle est constituée d'éléments macromoléculaires donnant lieu, au contact des solvants, à un gonflement ou à une agglutination, on éprouve toutefois des difficultés, telles que la prise en masse de l'échantillon. Pour les éviter, j'ai eu recours à la méthode suivante, applicable lorsque la substance peut se dissoudre entièrement dans un solvant volatil; par l'intermédiaire de cette solution, on disperse la substance sur un support inerte, finement divisé; on évapore complètement le solvant auxiliaire et l'on applique l'extraction au support présentant à sa surface la substance active, sous forme d'une pellicule de très faible épaisseur.

Il va de soi que toutes ces opérations sont réalisées sans dépasser la température maximum admissible. Le choix et l'état de division du support sont déterminés par les propriétés d'adhérence de la pellicule à extraire, par l'épaisseur optimum de cette dernière, enfin par les conditions de mouillage du support ainsi chargé au contact des solvants d'extraction.

L'ensemble des méthodes décrites ci-dessus m'a permis de réaliser le fractionnement de différentes résines phénoplastes, en utilisant comme support des grains de verre siliceux ou de quartz de $0^{mm},2$ de dimensions moyennes (compris entre les tamis 50 et 100), chargés de 2 % de résine.

On peut estimer que, dans ce cas, un gramme de substance à traiter offre à l'action du solvant une surface de près d'un mètre carré, sous une épaisseur moyenne de l'ordre de 1 μ.

La durée d'extraction par chacun des solvants peut être réduite à quelques heures, sans que l'on ait à effectuer des broyages intermédiaires causant des pertes; le bilan des extraits séparés se trouve vérifié à moins de 1 % près et d'une manière suffisamment reproductible.

CHIMIE PHYSIQUE. — *Sur la dissolution du soufre dans les solutions aqueuses de monosulfure de sodium.* Note (*) de Mme **Dora Peschanski**, transmise par M. Paul Pascal.

Afin de mettre au point une méthode de préparation de solutions de polysulfures de sodium $S_y Na_2$ d'indice moyen y donné, j'ai étudié la dissolution du soufre dans les solutions du sulfure, d'une part du point de vue cinétique, d'autre part en fonction de la composition, du pH, et du potentiel d'oxydo-

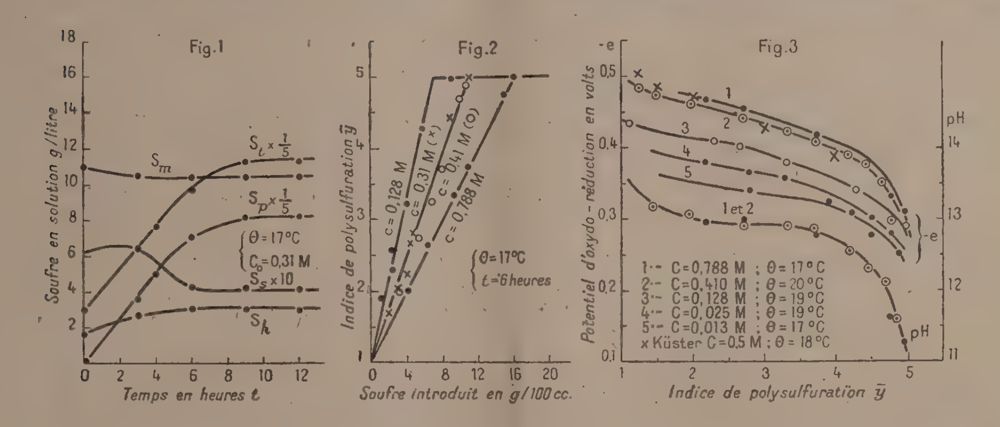
---

(*) Séance du 13 septembre 1948.

réduction des milieux obtenus. Les mesures expérimentales, déjà anciennes et d'ailleurs incomplètes, publiées sur ce sujet (¹), m'ont en effet paru nécessiter une révision.

Du soufre trituré, dont les grains présentaient un diamètre de fréquence maximum d'environ 120^{μ} a été ajouté en proportions variables à des solutions dans l'eau bouillie, à la molarité initiale c_0, de sulfure de sodium cristallisé. On opère dans des flacons paraffinés soumis à une agitation mécanique régulière et permanente. Des prélèvements de 5^{cm^3} ont été effectués à des temps connus (y compris l'instant zéro pour connaître la pureté du sel employé) et l'on a dosé (²) le soufre total S_t, le soufre de monosulfure S_m, le soufre de polysulfure S_p, le soufre d'hyposulfite S_h, le soufre de sulfhydrate S_s, en s'inspirant d'une méthode proposée par G. Valensi (³). J'ai fait varier la molarité c des ions S_y^{--} obtenus, depuis 0,013 jusqu'à 0, 788.

La figure 1 exprime l'évolution chronométrique de divers constituants dosés



après filtration, dans le mélange de 200^{cm^3} de solution primitive 0,31 M et de 20^g de soufre.

La dissolution est pratiquement terminée en 9 heures : tandis que la teneur en soufre de polysulfure augmente, celle du soufre de monosulfure diminue légèrement. En même temps, la proportion d'hyposulfite, dont le sulfure cristallisé employé n'est d'ailleurs pas absolument exempt, s'accroît, par suite d'une oxydation inévitable au cours des manipulations.

Les méthodes d'évaluation des auteurs précédents (¹) (soufre de polysulfure obtenu soit

---

(¹) F. W. Küster, *Zeits. Elektr.*, 8, 1902, p. 496; F. W. Küster et F. Heberlein, *Zeits. anorg. Chem.*, 43, 1905, p. 53.

(²) Les définitions de ces divers soufres ne correspondent pas aux états immédiats effectifs, indécelables analytiquement, mais à des conventions en général admises dans l'industrie des fongicides : S_m est le premier atome lié au sodium dans la formule moyenne $S_y Na_2$, S_p se rapporte aux $y-1$ autres; S_s se rapporte à l'ion SH^- en *sus de la fraction due à l'hydrolyse*, et résultant ordinairement de l'action du gaz carbonique de l'air.

(³) *Bull. Soc. Chim.* (5), 12, 1945, p. 642; *Chimie et Industrie*, 59, 1948, p. 440.

par différence entre le soufre introduit et le soufre solide résiduel, soit par précipitation au moyen d'acide chlorhydrique) néglige ce phénomène parasite. Ainsi sans doute s'explique le fait qu'ils trouvent dans certains cas des indices $\overline{y}$ supérieurs à 5, que je n'ai pas observés.

La figure 2 traduit, pour diverses molarités, la relation à temps d'agitation constant (ici 6 heures) entre la teneur en soufre de polysulfure et le poids total de soufre solide introduit dans un même volume. Cette variation est sensiblement linéaire. La vitesse de dissolution augmente légèrement quand la concentration initiale diminue.

Les pH mesurés à l'électrode de verre et les potentiels d'oxydo-réduction, rapportés à l'électrode normale à hydrogène, des solutions finales réalisées, sont représentés sur la figure 3 en fonction de l'indice $\overline{y}$, pour diverses concentrations moyennes. La fidélité de ces mesures est de l'ordre de 2 millivolts, *si l'on opère rapidement*, précaution d'autant plus nécessaire que l'indice $\overline{y}$ est plus faible. Le pH est pratiquement indépendant de la molarité pour $0,4 < c < 0,8$ et subit un effet tampon notable pour $2 \leq \overline{y} \leq 4$. Il devient instable pour $c < 0,05$. Les potentiels d'oxydo-réduction obtenus diffèrent d'autre part de ceux de F. W. Küster [1] pour $1 \leq \overline{y} \leq 2$.

CHIMIE ANALYTIQUE. — *Le dosage pondéral du chrome (Étude des précipités à l'aide de la thermobalance de Chevenard)*. Note de Mme **Thérèse Dupuis** et M. **Clément Duval**, présentée par M. Louis Hackspill.

Nous avons fait une étude critique de toutes les méthodes d'analyse pondérale du chrome sous ses valences 3 et 6, en vue de fixer les meilleures conditions de calcination des précipités et d'examiner si certaines méthodes pouvaient convenir à des dosages automatiques, suivant la technique déjà donnée [1].

1° Au cours du séchage ou de la calcination, il faut respecter les températures suivantes pour peser, d'une manière précise, les corps correspondants; les formes nouvelles proposées sont marquées d'un astérisque.

Réactif précipitant.	Forme de pesée.	Limite de temp. (°C.).	Réactif précipitant.	Forme de pesée.	Limite de temp. (°C.).
Ammoniaque (d'un sel chromique)......	Cr_2O_3	>812	Cyanate de potassium......	Cr_2O_3	>473
Ammoniaque (de l'acide chromique)......	Cr_2O_3	>188	Nitrite d'ammonium.......	Cr_2O_3	>880
Ammoniac (méthode de Trombe).	(*) $Cr(OH)_3$	440-475	Iodure-iodate de potassium.	Cr_2O_3	>850
» »	(*) Cr_2O_3	>845	Phosphate disodique.......	PO_4Cr	>946
Aniline......	Cr_2O_3	>830	Nitrate d'argent...........	CrO_4Ag_2	92-812
Hydroxylamine......	Cr_2O_3	>850	» mercureux........	(*) CrO_4Hg_2	52-256
Thiosemicarbazide......	(*) $Cr_2O_3.H_2O$	380-410	» »	Cr_2O_3	>671
»	Cr_2O_3	>475	» de baryum.........	CrO_4Ba	< 60
Cyanate de potassium........	(*) $Cr_2O_3.H_2O$	320-370	» de plomb..........	CrO_4Pb	91-904
			Hydroxy-8 quinoléine......	$(C_9H_6ON)_3Cr$	70-156
			» »	(*) Cr_2O_3	>500

(1) Clément Duval, *Comptes rendus*, **224**, 1947, p. 1824 et **226**, 1948, p. 1276 et 2727.

2° Au lieu de précipiter l'hydroxyde colloïdal de chrome par l'ammoniaque, en présence de sels ammoniacaux, nous avons, par application de la méthode classique de Trombe, envoyé un lent courant d'air froid chargé de gaz ammoniac dans une solution d'alun de chrome privée initialement de tout sel ammoniacal. L'hydroxyde chromique précipite dès le pH 5,5; on arrête quand le pH atteint la valeur 11, on filtre et on lave aussitôt. La courbe enregistrée sur le précipité formé, avec la thermobalance, indique un palier bien horizontal entre 440 et 475°, correspondant rigoureusement à l'hydroxyde $Cr(OH)_3$, obtenu ainsi à l'état de pureté.

3° Si, maintenant, on effectue la précipitation par la thiosemicarbazide ou par le cyanate de potassium, à l'ébullition, c'est l'hydrate $Cr_2O_3 . H_2O$, correspondant aux chromites, que l'on obtient pur entre 380 et 410° (il n'avait été obtenu que sous pression jusqu'ici). Dès 475°, cet *acide chromeux* est transformé, par déshydratation, en trioxyde vert Cr_2O_3, tandis que la température moyenne de 840° (*voir* tableau ci-dessus) est nécessaire quand on part de l'hydroxyde chromique pur ou impur.

4° Le chromate d'argent est stable jusqu'à 812°; il est donc inutile de s'asteindre à le sécher à 135° comme on le propose dans les livres d'analyse. De 812 à 945°, il perd rigoureusement une molécule d'oxygène par molécule de chromate, abandonnant un mélange d'argent et de chromite, réaction nouvelle pouvant se formuler ainsi :

$$2\,CrO_4Ag_2 \rightarrow 2\,O_2 + 2\,Ag + Cr_2O_4Ag_2.$$

5° La précipitation du chrome en chromate mercureux, que l'on détruit par la chaleur pour effectuer la pesée en oxyde Cr_2O_3, est une excellente méthode analytique, restreinte naturellement, au cas où la liqueur initiale ne renferme que des chromates et des nitrates. Nous avons pensé qu'il était inutile d'employer cette méthode (dangereuse à cause du mercure dégagé) si l'on ne profitait pas de l'avantage du poids atomique élevé du mercure. En fait, la courbe tracée nous fait apparaître que le chromate mercureux, après séchage jusqu'à 52°, reste parfaitement stable jusqu'à 256°. Nous proposons donc de peser sous forme de chromate mercureux anhydre après séchage entre ces températures et d'appliquer la relation : poids de chrome = poids de précipité $\times$ 0,100; d'où l'intérêt particulier de ce procédé en microgravimétrie.

6° Certains auteurs proposent de calciner le chromate de baryum au rouge blanc, d'autres, de ne pas dépasser 180°. La courbe tracée pour ce corps nous montre qu'en toute rigueur, il ne conserve la formule CrO_4Ba que jusqu'à 60°. En continuant le chauffage jusqu'à 1015°, on aboutit à un mélange de chromate jaune et d'oxyde de chrome vert. La courbe présente deux paliers horizontaux bien reproductibles, mais ne correspondant à aucun composé défini. L'amplitude de ces variations est faible puisque la perte totale d'oxygène n'atteint pas 1 % à 1015°. Ainsi pour une prise d'essai de 1720^{mg} (choisie intentionnellement

forte), la perte est $18^{mg},1$ (accord complet entre l'enregistrement direct et la pesée sur la semi-micro-balance). Ces paliers, qui correspondent, selon nous, à des réactions d'équilibre, se manifestent, le premier, de 530 à 790°, le second à partir de 930°, Le chromate de strontium, qui ne présente pas de telles variations de poids par chauffage, serait préférable à celui de baryum.

7° Le chromate de plomb est stable jusqu'à 904°; il perd aussi de l'oxygène, mais, auparavant, et depuis 673°, il a gagné du poids très faiblement (1^{mg} sur 400^{mg}). C'est un fait que nous avons constaté souvent chez les métaux les plus divers : chaque fois qu'un corps doit perdre de l'oxygène, il commence par en emprunter à l'atmosphère, sans doute, pour donner un perdérivé instable, susceptible d'induire la réaction de destruction.

GÉOLOGIE. — *Sur une singularité isostatique en relation avec une fosse de sédimentation néogène dans le bassin du Hodna (Algérie).* Note de MM. **Jean Lagrula** et **Alexis Lambert**, présentée par M. Pierre Lejay.

En 1946 nous avons procédé à une étude du bassin du Hodna, associant étroitement les données de la géologie et celle de la gravimétrie. Les premiers résultats obtenus au moyen du gravimètre Holweck-Lejay de l'Observatoire d'Alger mirent en évidence une zone d'anomalies de Bouguer fortement négatives, atteignant — 100 milligals ([1]). Après avoir complété les mesures antérieures concernant les régions voisines, nous nous sommes trouvés en présence d'une singularité nettement localisée, dont l'allure a pu être précisée au cours d'une nouvelle campagne effectuée cette année.

Elle coïncide avec un bassin néogène qui occupe le secteur NE de la dépression hodnéenne. M. J. Savornin ([2]) avait donné de ce bassin la description suivante : les terrains tertiaires y sont représentés, à leur base, par des grès ou des calcaires burdigaliens; ces formations transgressives sur un matériel crétacique ou nummulitique, sont surmontées par des mares marines qui passent progressivement, à leur partie supérieure, à des dépôts lagunaires ou continentaux pontiens. Le bassin tertiaire est accidenté par des replis dont le plus apparent est le dôme elliptique du Chott el Hammam.

Nos observations géologiques viennent compléter celles de M. Savornin en ce qui concerne la puissance des terrains néogènes : leur épaisseur est comprise entre 3000 et 4000^{m}; il s'agit donc d'une véritable fosse de sédimentation. D'autre part, les anomalies de Bouguer viennent d'être complétées par le calcul de la compensation isostatique, conforme au schéma d'Airy. Les anomalies résiduelles (anomalies isostatiques) sont encore négatives, mais leur valeur maxi-

---

([1]) Jean Lagrula, *Comptes rendus*, 224, 1947, p. 636.

([2]) *Etude géologique de la région du Hodna et du plateau sétifien* (*Thèse*, Lyon) et *B. C. G. A.*, 2e série, n° 7.

mum, correspondant à la partie centrale du bassin néogène, est réduite à une valeur qui varie de —36 à —48 milligals pour des profondeurs de compensation comprises entre 30 et 60^{km}. Ces anomalies ont été calculées, d'après les tables de Heiskanen, pour une densité du sial uniforme et égale à 2,67. Or, si nous ne connaissons pas encore, par des mesures directes, la densité des terrains néogènes, nous avons, par analogie avec des terrains similaires, son ordre de grandeur. Nous pouvons adopter la valeur moyenne 2,17 ([3]).

En substituant cette valeur, pour ce qui concerne les formations néogènes à la valeur primitive 2,67, nous constatons que l'anomalie isostatique maximum est réduite de 36 à 45 milligals suivant que l'on assigne aux formations néogènes une puissance de 3000 à 4000^{m}. Nous avons affaire à des valeurs numériques (profondeur de compensation, densités, puissances) qui ne sont pas encore fixées avec précision. Aussi ne pouvons-nous pas calculer les anomalies isostatiques au milligal près. Mais ce qui est sûr, c'est que, à quelques milligals près, *l'épaisseur considérable des formations tertiaires de faible densité explique notre singularité isostatique*.

Cette conclusion est rendue encore plus nette par une mesure effectuée cette année sur le dôme du Chott el Hamman. L'anomalie gravimétrique de cette station est inférieure en valeur absolue, d'une quinzaine de milligals, à celle des stations voisines. Or, la série tertiaire s'y trouve amputée par l'érosion des formations pontiennes dont la puissance peut être évaluée à un millier de mètres.

Conclusions. — Nous avons mis en évidence une corrélation entre la singularité isostatique du bassin du Hodna et la puissance des formations néogènes. Compte tenu de la faible densité de ces dernières, les anomalies gravimétriques sont compatibles avec l'équilibre isostatique.

La fosse de sédimentation et sa périphérie constituent un domaine exceptionnellement favorable à une étude mixte de géologie et géophysique. Les méthodes de la prospection détaillée pourraient y être utilement mises en œuvre, en vue de déterminer les structures anticlinales analogues au dôme du Chott el Hamman et actuellement masquées par les formations quaternaires.

GÉOGRAPHIE PHYSIQUE. CLIMATOLOGIE DYNAMIQUE. — *Sur la répartition géographique et la variation des anomalies de la pression barométrique*. Note de M. **Lucien Petitjean**, présentée par M. Emmanuel de Martonne.

J'ai exposé récemment ([1]) comment l'analyse synoptique des cartes successives d'anomalies de la pression moyenne annuelle fait apparaître une répar-

([3]) C. A. Heiland, *Geophysical exploration*, Prentice-hall, New-York.

([1]) *Comptes rendus*, 226, 1948, p. 1997.

tition régulière de ces anomalies, à l'intérieur de fuseaux d'une ouverture de 30 à 40° de longitude et avec changement de signe en passant d'un fuseau aux fuseaux contigus. Le signe reste le même, pour chaque fuseau, au cours d'intervalles d'une durée moyenne de douze mois et leur valeur absolue, dans la région centrale des domaines d'anomalies, est maximum au milieu de chacun de ces intervalles.

Une oscillation quasi stationnaire de la pression, d'une période moyenne de deux ans, peut être suivie au cours du temps en traçant des lignes de crêtes et de creux (lignes ventrales) qui présentent des sinuosités aux sommets desquelles se trouvent les centres des domaines d'anomalies. Il existe un double système de lignes ventrales : les lignes d'un premier réseau réunissent les centres d'anomalies dans le sens des parallèles et s'étagent en latitude tous les 15 à 20° en moyenne, tandis qu'un second réseau est constitué par des lignes en forme d'S qui relient les centres d'anomalies dans le sens des méridiens et sont distantes les unes des autres d'environ 30 à 40° de longitude.

Chacun des fuseaux où se trouvent les lignes de crête et de creux du second réseau d'oscillations est parcouru par une double série d'ondes progressant, dans la direction des méridiens, d'environ 15° à 20° de latitude par an : un premier train d'ondes, d'une période moyenne de douze mois, part des régions arctiques vers les régions tropicales pendant qu'un second train d'ondes se dirige en sens opposé. L'interférence d'ondes de même phase et de direction opposée a lieu dans la région centrale des domaines d'anomalies. De l'interférence d'ondes de phase et de direction opposées résulte la formation de plages d'anomalies dont le signe est le même que celui de l'onde de plus forte amplitude.

Le sens de propagation des trains d'onde s'inverse de part et d'autre de la région centrale des domaines d'anomalies et reste le même entre deux sommets consécutifs d'une ligne ventrale du premier réseau. Il en résulte que les deux portions de cette ligne situées respectivement à l'Ouest et à l'Est d'un centre d'anomalies se déplacent en sens opposé pour venir se substituer, du milieu d'un intervalle de douze mois au milieu de l'intervalle suivant (c'est-à-dire au cours d'une demi-période), aux portions correspondantes des lignes ventrales les plus proches qui courent, parallèlement à la ligne considérée, au Nord et au Sud de cette dernière.

A certaines époques, l'amplitude des ondes de pression arctiques, pour un fuseau déterminé, est toujours plus grande que celle des ondes de pression tropicales. Il s'ensuit, dans ce fuseau, un mouvement de translation vers le Sud des lignes ventrales du premier réseau d'oscillations. L'inverse se produit dans les fuseaux adjacents où l'amplitude des ondes de pression tropicales est alors supérieure à celle des ondes de pression arctiques.

D'une manière analogue, le déplacement des lignes ventrales du second réseau d'oscillations correspond à la propagation d'une double série d'ondes

dirigées en sens opposé et suivant les parallèles. Ces ondes parcourent, en moyenne, tous les douze mois, des arcs de parallèle de 30° à 40°. Comme pour le premier réseau, des interférences d'ondes de même phase et de direction opposée ont lieu dans la région centrale des domaines d'anomalies. A certaines époques, également, l'amplitude des ondes de direction Est-Ouest l'emporte sur celle des ondes de direction opposée, pour la partie des lignes ventrales qui relie deux centres d'anomalies Nord et Sud.

Application à la prévision à longue échéance. — Il est aisé de déterminer la trajectoire des centres d'anomalies d'après leur position sur les lignes ventrales et le déplacement de ces dernières. Cette détermination repose sur les deux règles fondamentales suivantes :

I. Un centre d'anomalies d'un signe déterminé et situé au sommet Nord d'une boucle d'une ligne ventrale du premier réseau d'oscillations vient se substituer, au bout de douze mois, au centre d'anomalies le plus proche et de signe opposé situé au sommet Sud d'une boucle, en se déplaçant vers le Nord-Ouest ou le Nord-Est, selon que la propagation des ondes de pression s'effectue vers le Nord, à l'Ouest ou à l'Est du premier centre d'anomalies. Et, d'une manière analogue :

II. Un centre d'anomalies d'un signe déterminé et situé au sommet Sud d'une boucle d'une ligne ventrale du premier réseau d'oscillations vient se substituer, au bout de douze mois, au centre d'anomalies le plus proche et de signe opposé situé au sommet Nord d'une boucle, en se déplaçant vers le Sud-Ouest ou le Sud-Est, selon que la propagation des ondes de pression s'effectue vers le Sud, à l'Ouest ou à l'Est du premier centre d'anomalies.

On suppose que la direction de propagation des ondes de pression demeure la même au cours des intervalles de douze mois considérés. La position des centres d'anomalies peut ainsi être prévue douze mois à l'avance, ce qui résout, du même coup, le problème de la future répartition de la pression moyenne annuelle et permet ainsi de localiser les régions à forte anomalie positive où la sécheresse est à redouter et les régions à forte anomalie négative où, au contraire, la pluviosité sera abondante.

PHYSIQUE DU GLOBE. — *Sur l'excitation des bandes de la molécule d'azote ionisée au crépuscule.* Note de M. **Maurice Dufay**, présentée par M. Jean Cabannes.

Les observations poursuivies depuis août 1946 permettent de compléter et de préciser les résultats annoncés dans une Note précédente [1].

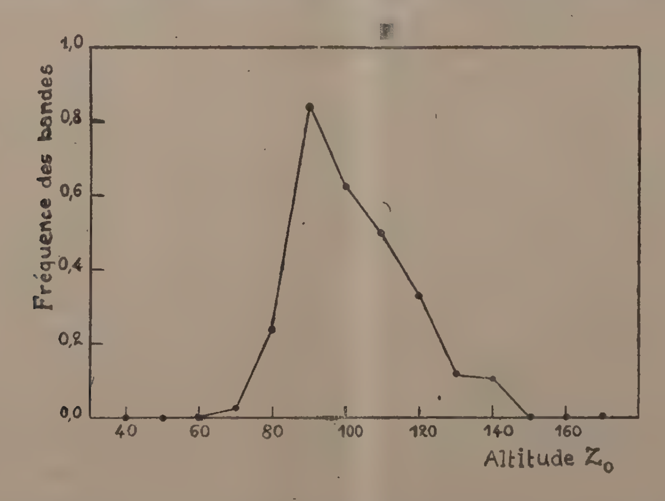
L'apparition des bandes négatives de l'azote au crépuscule peut être considérée comme un phénomène quotidien. Si l'on élimine en effet les clichés obtenus par

[1] *Comptes rendus*, 224, 1947, p. 1834.

clair de Lune et par ciel nuageux ou brumeux, on constate que les bandes ont été enregistrées pendant 18 soirées sur 20 (soit dans 90 % des cas) avec les spectrographes de quartz et pendant 27 soirées sur 40 (67 % des cas) avec le spectrographe de verre, dont le gros prisme de flint dense absorbe fortement la bande 3914 Å. Les observations portent alors essentiellement sur la bande 4278 Å, environ 3 fois plus faible, et qui échappe plus facilement.

Les variations d'intensité déjà signalées d'un soir à l'autre ont été confirmées par des mesures spectrophotométriques. Il n'est pas rare qu'elles dépassent 30 %, à l'Observatoire de Haute-Provence, dans des conditions expérimentales rigoureusement identiques, par ciel également pur. On n'a jamais retrouvé une intensité aussi grande que pendant l'orage magnétique du 22 septembre 1946, mais, en plusieurs occasions, on a encore observé des bandes fortes quand l'agitation magnétique était prononcée (18 juillet 1947, 18 avril 1947, après l'aurore polaire du 17). Il est vrai que des bandes aussi fortes ont été photographiées en l'absence de toute perturbation [10 août 1947, 12 mars 1948 ([2])], de sorte que, dans l'ensemble, on ne trouve pas de corrélation marquée entre l'intensité des bandes et l'agitation magnétique.

Il est naturel d'admettre que l'émission se produit dans une région de l'atmosphère éclairée par le Soleil. L'altitude correspondante z est alors supérieure à l'altitude z_0 au-dessus de laquelle l'atmosphère est éclairée au début de la pose. Le graphique ci-joint, construit à l'aide de 232 spectro-



grammes, représente la fréquence de l'observation des bandes, pour des valeurs de z_0 échelonnées de 10 en 10^{km}. On voit que les bandes apparaissent pour une valeur assez bien définie de z_0, de l'ordre de 90 à 100^{km}. Les bandes

([2]) On peut être tenté de rapprocher ces derniers cas des averses météoriques : Perséides le 10 août, ζ Bootides du 10 au 12 mars.

photographiées dans quelques cas seulement pour $z_0 > 130^{km}$ sont toujours très faibles.

Tous ces clichés ont été pris le soir, en visant sensiblement dans l'azimut du Soleil couché, à une hauteur voisine de 15°. Quelques poses faites à l'aube, en visant vers l'Est, ont donné des résultats identiques. J'ai photographié aussi quelquefois les bandes au zénith (le soir et le matin), où elles sont plus faibles et plus fugitives, au moyen du spectrographe de quartz très lumineux d'Arnulf et Lyot ([3]). Elles apparaissent encore pour $z_0 \geq 100^{km}$. La combinaison des observations faites au zénith et près de l'horizon peut, en principe, conduire à déterminer l'altitude vraie de l'émission, mais la méthode manque vraiment de sensibilité et tout ce que l'on peut conclure des observations actuelles, c'est que l'émission se produit à une centaine de kilomètres au-dessus de la couche atmosphérique opaque aux radiations excitatrices, sous l'incidence rasante, sans qu'il soit possible d'évaluer l'épaisseur de cette *couche-écran*.

Dans l'hypothèse de la résonance optique, qui suppose l'existence préalable de molécules d'azote ionisées,

$$N_2^+(X^2\Sigma) + h\nu \rightarrow N_2^+(B^2\Sigma), \quad (1)$$

la couche-écran aurait environ 15^{km} d'épaisseur et l'altitude vraie de l'émission serait celle de la région E. Mais, si l'excitation et l'ionisation sont provoquées directement, à partir du niveau normal de la molécule neutre

$$N_2(X^1\Sigma) + h\nu \rightarrow N_2^+(B^2\Sigma) + e, \quad (2)$$

les radiations excitatrices, de longueurs d'onde inférieures à 660 Å, ne peuvent pénétrer profondément dans l'atmosphère. La couche-écran aurait au moins 150^{km} d'épaisseur et l'émission pourrait se produire dans la région F. [Un mécanisme semblable, à partir des molécules métastables $N_2(A^3\Sigma)$, exigerait seulement des radiations de longueurs d'onde inférieures à 1000 Å.]

R. Bates ([4]) a étudié théoriquement les deux mécanismes précédents et conclu formellement en faveur du premier. Il a trouvé en effet que, même si les ions étaient produits par (2), le mécanisme (1) se montrerait ensuite de beaucoup le plus efficace. Il est donc probable que l'émission a lieu, par résonance optique, dans la région E de l'ionosphère. La faible dispersion des spectrographes que j'ai utilisés ne permet malheureusement pas de voir si le contour des bandes est altéré par la présence des raies de Fraunhofer.

([3]) *Comptes rendus*, **201**, 1935, p. 1480.

([4]) Communication privée.

ANATOMIE COMPARÉE. — *Interprétation du cerveau de l'*Oreodon.
Note de M[lle] **Madeleine Friant**, présentée par M. Émile Roubaud.

Le moule endocrânien de certains Mammifères disparus est si bien conservé que les hémisphères cérébraux de ces animaux nous sont connus presque aussi parfaitement que ceux des formes actuelles, à l'exception, toutefois, de leur face interne.

L'*Oreodon*, de l'Oligocène nord-américain, avait été examiné, autrefois, au point de vue cérébral, par P. Gratiolet et J. Leidy, puis décrit en détail par D. Black, en 1920, et, enfin, mentionné par R. L. Moodie, en 1922. Grâce à M. le Professeur D. M. S. Watson, j'ai eu l'occasion d'étudier à nouveau et d'interpréter, à l'Université de Londres, le moule endocrânien de cet Ongulé sélénodonte primitif.

Le télencéphale, sur lequel les bulbes olfactifs n'ont pas été conservés, est remarquable par sa hauteur et, surtout, sa largeur, exceptionnelles pour un Ruminant. En voici les indices :

$$I_1 = \frac{H \times 100}{L} = 66{,}6,$$

$$I_2 = \frac{L_a \times 100}{L} = 104{,}6.$$

Le rhinencéphale est plus développé que celui des Ruminants actuels, même les plus archaïques, les Tragulidés. Il est séparé du *neopallium* par une scissure rhinale qui, dans son ensemble, forme, vers le bas, un angle très ouvert, de 145° environ. Les tubercules olfactifs sont particulièrement volumineux.

Sur le *neopallium*, bien qu'on ne voie pas de complexe sylvien, il y a tout lieu de penser que, vers l'intérieur, au niveau de la scissure rhinale, existait une région operculisée correspondant à la totalité du *gyrus arcuatus* I, de même que chez les Tragulidés, alors que la partie antéro-inférieure de ce *gyrus* demeure superficielle chez les Cervicornes et les Cavicornes.

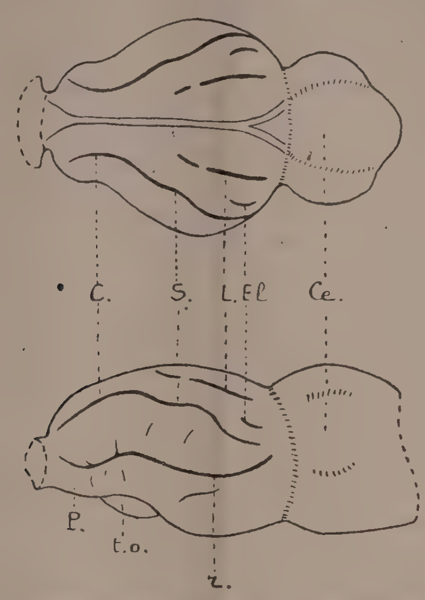
La *præsylvia* semble faire suite, en avant, à la scissure rhinale. Le premier grand sillon que l'on rencontre, sur le *neopallium*, en remontant à partir de la scissure rhinale, est la *suprasylvia* qui, allongée, sinueuse, se prolonge antérieurement par le coronal, disposition caractéristique du cerveau des Sélénodontes. Le latéral, presque rectiligne, est divisé en deux parties.

Quoique le *gyrus arcuatus* II soit très large, il ne présente pas trace des sillons δ et γ, si constants chez les Artiodactyles actuels, mais seulement de légers sillons radiaires (¹). Par contre, au niveau du *gyrus arcuatus* III, existe un ectolatéral, court et très net.

Le splénial, sillon de la face interne des hémisphères, n'est pas visible sur la

(¹) Plusieurs de ces sillons, accentués sur le dessin de D. Black, pouvaient être interprétés comme une *præsylvia*, un complexe sylvien et un sillon δ (M. Friant, 1939), ce qui n'est cependant pas le cas.

face supérieure, alors qu'il empiète largement sur cette face chez beaucoup de Ruminants : Tragule, Céphalophe, etc.



Moule endocrânien naturel d'*Oreodon* (*Merycoidodon* sp.) *Oreodontidæ*. Oligocène des Oreodon Beds, U. S. A. — Collection de M. le Professeur D. M. S. Watson, University College, Londres. — *En haut :* face supérieure de l'encéphale. *En bas :* face latérale gauche. — Cervelet Ce. Télencéphale : to., tubercule olfactif; r., scissure rhinale; P., *præsylvia*; S., *suprasylvia*; C., coronal; L., latéral; El., ectolatéral. — Dimensions réelles du télencéphale : L. = 42mm,5; La. = 44mm,5; H. = 28mm,4. 3/4 de grandeur naturelle, environ.

En somme, cette étude montre que le cerveau de l'*Oreodon*, bien que typiquement celui d'un Sélénodonte, par la position du coronal dans le prolongement direct de la *suprasylvia*, est encore très primitif par sa hauteur et sa largeur considérables, l'operculisation totale du *gyrus arcuatus* I, l'absence des sillons δ et γ. La morphologie du cerveau vient donc s'ajouter à ce que nous connaissions déjà des extrémités et de la dentition pour faire de l'*Oreodon* un Ruminant très archaïque.

Par contre, chez le *Cænotherium* d'Europe (Eocène supérieur, Oligocène et Miocène inférieur), plus évolué que l'*Oreodon*, quant à son ostéologie et à sa morphologie dentaire, le cerveau est déjà celui d'un véritable Ruminant par sa forme étroite et surbaissée, de même que par la présence du sillon δ (R. Anthony et M. Friant, 1938).

BIOLOGIE. — *La* sociotomie, *mode de fondation de sociétés nouvelles chez les Termites*. Note (*) de MM. **Pierre-P. Grassé** et **Charles Noirot**, présentée par M. Maurice Caullery.

Actuellement, on admet que les nouvelles sociétés de Termites sont fondées, soit par un couple d'Insectes parfaits qui ont participé à l'essaimage

(*) Séance du 4 octobre 1948.

et ont perdu leurs ailes par autotomie, lors de la pariade, soit par un groupe d'individus qui, sans effectuer de déplacement notable, s'isole plus ou moins de la société mère et acquiert, toujours par néoténie, un ou plusieurs couples de reproducteurs (*bouturage*). Ce deuxième mode n'est connu en toute certitude que chez les *Reticulitermes*.

Nous avons découvert un troisième mode de fondation, jusqu'ici insoupçonné, que pratiquent, en Afrique Équatoriale, les *Anoplotermes* et les *Trinervitermes*. Le cas des premiers étant le plus simple sera seul exposé ici.

Tout d'abord, rappelons que les *Anoplotermes* se nourrissent d'humus, mènent une vie souterraine et ne s'exposent normalement ni à l'air libre, ni à la lumière. Seuls parmi les Isoptères, ils ne possèdent pas de soldats.

Sous l'empire de circonstances qui restent à déterminer, les ouvriers creusent une galerie qui débouche à l'extérieur et par laquelle, hors du nid hypogé, s'échappe un flot de Termites. Ceux-ci s'organisent en une colonne longue de 2 à $2^{m}50$, large de 4 à 8^{cm}. Ils marchent côte à côte, parallèlement les uns aux autres.

Les émigrants appartiennent à toutes les castes de la population : les ouvriers dominent, mais les larves sont abondantes. Seules les larves âgées se déplacent par elles-mêmes; toutes les autres sont portées par les ouvriers, qui les saisissent entre leurs mandibules. Nombreux sont les ouvriers qui tiennent un œuf entre leurs pièces buccales.

Le couple royal participe à l'exode. La reine, vieille de plusieurs années, comme l'atteste son obésité (3^{cm} de long), suit, sans peine au départ, la colonne qui marche à bonne allure. Elle se meut avec ses pattes et plus encore grâce aux mouvements péristaltiques et vermoïdes de son abdomen. Au bout de deux heures environ, elle donne des signes de fatigue et s'arrête souvent. Elle ne sert pas de conductrice aux pérégrinants et se tient à distance de la tête de la colonne. Des ouvriers sont juchés sur elle; d'autres, pendant les arrêts, la lèchent avec frénésie. Le roi, très agile, change à tout instant de position au sein de la bande.

Plusieurs ouvriers, au cours de l'exode, affectent un comportement de soldats : ils se placent de part et d'autre de la colonne, en flanc-gardes, la tête tournée vers l'extérieur, avec une attitude menaçante.

La conduite de tous les individus est profondément modifiée aussi longtemps que dure la migration. Ainsi, chez les *Trinervitermes*, des ailés participent à l'exode, sans manifester de phototaxie positive et sans prendre le vol à aucun moment (¹).

La colonne décrit des méandres, oscille de droite à gauche, change souvent de direction. Au bout de peu de temps, elle se scinde en plusieurs tronçons, un avec la reine, un autre avec le roi, etc. Chaque bande poursuit isolément sa marche tâtonnante et peut subir, à son tour, une scission.

(¹) Des Lépismes termitophiles accompagnaient les colonnes d'*Anoplotermes*.

Les petites colonnes secondaires, après une pérégrination qui dure au minimum deux heures, s'arrêtent, et forment des rassemblements où les individus se pressent les uns contre les autres. Les arrêts se produisent au niveau de petits accidents du sol, ornière étroite, crevasse, etc. Les ouvriers creusent un puits dans la terre : en peu de temps le groupe entier se fraie un chemin souterrain et disparaît.

Nous nommons *sociotomie* cet étrange comportement qui aboutit à la fragmentation de la société.

Par l'élevage, nous avons pu connaître la destinée des groupes isolés : ils prospèrent et constituent de petites sociétés.

Avant de conclure, nous appellerons l'attention sur le fait : 1° que l'exode n'est pas la conséquence d'une attaque du nid par des ennemis (notamment par des Fourmis); 2° que la migration peut se faire par vagues successives, la première étant la plus importante et comprenant le couple royal, les suivantes, beaucoup plus faibles, avec seulement quelques centaines de participants.

Il nous a paru que la termitière ne se vide pas entièrement de sa population; le nombre des émigrants est assurément inférieur à la totalité des habitants du nid.

Notons enfin que les émigrants sont en bonne santé, comme le montrent les élevages entretenus avec eux.

L'observation répétée de ces phénomènes nous permet d'assurer qu'ils correspondent à une activité normale de la société.

Les faits exposés ci-dessus établissent que, dans certaines conditions, une partie de la population, avec le couple royal, abandonne la termitière, en emportant des œufs et du couvain; que la colonne des émigrants se fragmente et que chaque fraction devient le point de départ d'une nouvelle société ayant pour reproducteurs, soit les sexués imaginaux originaires de la termitière souche, soit des sexués néoténiques.

Par conséquent, la sociotomie assure une large et rapide multiplication de la société, selon une pratique bien différente de l'essaimage et du bouturage.

PHYSIQUE BIOLOGIQUE. — *Augmentation de la vitesse d'extension de cultures de tissus irradiées par des micro-ondes* (longueur d'onde 21^{cm}). Note (*) de MM. **Luc de Séguin**, **Etienne Lasfargues** et Mlle **Monique Pelletier**, présentée par M. Jacques Tréfouël.

Méthode. — I. L'expérimentation porte sur des cultures de cœur d'embryon de poulet, au début et après repiquages, préparées en goutte pendante, entre lame et lamelle, dans les conditions habituelles (une goutte de plasma de cobaye et une goutte d'extrait de rate de cobaye).

a. Dans chaque série, des cultures sont exposées, dans l'heure qui suit leur préparation, à des champs électromagnétiques de longueur d'onde 21^{cm}

(*) Séance du 27 septembre 1948.

et de puissance allant jusqu'à 200 W, pendant des temps allant de une à trois minutes.

b. Dans certaines séries, on prépare des *témoins-chauffages* en plaçant sur la lamelle de la préparation un cylindre métallique maintenu à température constante par une résistance chauffante, ou à l'aide d'un courant d'air chaud, de façon à amener, dans le même temps, la goutte du milieu nutritif à la température atteinte par la goutte de la préparation irradiée dont elle est le témoin.

c. Les préparations témoins subissent toutes les manipulations à l'exception de l'irradiation ou du chauffage.

Les cultures sont placées à l'étuve à 37°. Les cultures de cœur d'embryon de poulet atteignent leur développement maximum vers la 72[e] heure. Elles sont retirées de l'étuve entre la 40[e] et la 48[e] heure. Les aires de croissances sont dessinées sur papier, à la chambre claire, découpées et pesées. Les poids sont en relation avec l'importance de la croissance.

II. La même méthode est employée pour la rate de cobaye au début; les lames sont laissées dix-huit heures à l'étuve. L'intérêt théorique est moindre ici puisqu'il s'agit surtout de migrations, et non de multiplications cellulaires.

Quelques résultats expérimentaux. — On a pris dans chaque série l'aire moyenne des croissances des témoins égale à 100.

	Rate de cobaye	
	Témoins 8 fragments.	Irradiés 6 fragments.
Poids moyen d'un fragment.	100	153

	Rate de cobaye	
	Témoins 8 fragments.	Irradiés 12 fragments.
Poids moyen d'un fragment.	100	255

	Embryon de poulet repiquage	
	Témoins 7 fragments.	Irradiés 6 fragments.
Poids moyen d'un fragment.	100	255,1

	Embryon de poulet		
	Témoins 10 fragments.	Irradiés 10 fragments.	Chauffés 10 fragments.
Poids moyen d'un fragment.	100	491,8	196

Cœur d'embryon de poulet. Les zones noires représentent les aires de croissance.
La rangée supérieure est constituée par les aires de croissance des témoins. La seconde rangée est constituée par les préparations chauffées. La rangée inférieure est constituée par les préparations irradiées.

Résultats. — Si les irradiations amènent la goutte du milieu nutritif à une température incompatible avec la survie des fragments de tissus, on observe les mêmes modifications que pour la chaleur.

Pour des irradiations plus faibles nous n'avons pas observé de modifications de la morphologie cellulaire, mais une très nette augmentation de la vitesse d'extension des cultures qu'on ne reproduit pas en portant les cultures à la même température par un moyen habituel de chauffage.

PSYCHOLOGIE ANIMALE. — *Inhibition de la photonégativité par le dressage, chez* Blattella. Note (*) de M. **Michel Goustard**, présentée par M. Émile Roubaud.

Comme l'a montré Chauvin ([1]), *Blattella* peut être aisément dressée à parcourir un labyrinthe simple et vivement éclairé, à l'extrémité duquel elle peut se réfugier dans un abri obscur. En effet, les *Blattes* étant fortement négatives, il paraît logique de les soumettre à l'action d'une source lumineuse qui fournit une partie de la motivation du dressage; nous allons voir toutefois que, dans certaines circonstances, le sens de la réaction à la lumière peut être en quelque sorte inversé. Dans les expériences de Chauvin, la source, une ampoule de 200 watts, était placée au-dessus de la zone médiane du labyrinthe, constitué par des lames métalliques en forme de T, disposées les unes à la suite des autres suivant différentes positions; j'ai donné au labyrinthe, au cours des expériences dont l'exposé va suivre, la forme d'une allée centrale, portant, de chaque côté, cinq branches opposées deux à deux. Mais, au lieu de placer la lampe au-dessus de la zone médiane, je l'ai décalée latéralement, en la disposant au-dessus non plus de l'allée centrale, mais des branches latérales. On n'observe alors qu'une inhibition de l'apprentissage, *lorsque la lampe se trouve non loin de la zone médiane*. Les résultats deviennent un peu moins mauvais *à mesure que la lampe se rapproche de l'extrémité du labyrinthe opposée au point de départ*; à cette extrémité se trouve l'abri, au bout d'une branche latérale. *Lorsqu'on place la lampe juste au-dessus de l'abri*, l'apprentissage devient subitement très aisé, avec décroissance très régulière du nombre des erreurs au fur et à mesure des essais, et les résultats sont même bien supérieurs à ceux qu'obtenait Chauvin, avec l'ampoule au milieu du labyrinthe.

Ce résultat peut paraître paradoxal, puisque, dans ces conditions, la Blatte photonégative ne cesse de se rapprocher de la source pendant tout le parcours. Nous avons tenté de l'expliquer en invoquant l'hypothèse suivante : *la présence de la lampe serait visuellement associée par la Blatte à celle de l'abri*. Cette hypothèse s'appuie sur les arguments suivants :

1° Les expériences de Hullo ([2]) démontrent l'inhibition du dressage

---

(*) Séance du 11 octobre 1948.

([1]) *Bulletin biologique*, 8, 1947, fasc. I-II, p. 92-128.

([2]) Travail en cours de parution dans *Behaviour*.

lorsqu'on déplace la lampe au cours de l'apprentissage (rappelons que nous ne la déplacions nous-même qu'au bout d'une série d'expériences, mais qu'elle restait fixe pendant toute la série). La Blatte peut donc percevoir l'emplacement de cette source.

2° Lorsque nous disposons au-dessus du labyrinthe une grande cuve à eau transparente, toujours avec la source au-dessus de l'abri, il n'y a pas de perturbation sensible par rapport aux résultats précédents. Le repérage de la source paraît donc dû aux excitations lumineuses, à *l'exclusion des calorifiques*.

3° Le *vernissage des yeux* produit (toujours avec la lampe au-dessus de l'abri) une inhibition totale de l'apprentissage; il est intéressant de noter que Chauvin, vernissant les yeux de ses sujets, n'obtient, au contraire, avec la lampe au-dessus de la zone médiane du labyrinthe, qu'une perturbation insignifiante; le sens de la vue peut donc être utilisé ou non par *Blattella*, suivant la place de la source lumineuse.

4° Il faut ajouter quelques remarques complémentaires. L'échec du dressage que j'ai provoqué par vernissage des yeux seuls, à l'exclusion des ocelles, prouve que ces derniers organes ne peuvent suffire au repérage visuel, ainsi qu'il arrive chez d'autres insectes, comme les chenilles. Il vient aussi à l'appui de la théorie de Viaud (3) qui attribue le repérage dans le phototropisme à la vue, alors que le sens de la réaction, positive ou négative, serait dû, d'après lui, à la sensibilité dermatoptique (qu'il vaudrait mieux appeler extra-oculaire pour ne pas préjuger du rôle du tégument dont nous ne savons rien).

Lorsque nous vernissons les yeux de nos sujets, l'impulsion photonégative, qui ne dépend pas des yeux, reste seule, et les échecs s'expliquent tout naturellement par le fait que l'animal doit se rapprocher sans cesse de la source pour atteindre l'abri. Mais dans les conditions habituelles, la lampe acquiert une valeur de signal qui surpasse l'impulsion photonégative. Cette signalisation est assez précieuse; elle se rapporte, semble-t-il, à l'abri lui-même, et non pas à la zone du labyrinthe où se trouve l'abri; en effet, si nous disposons l'ampoule, non plus au-dessus de l'abri, mais au-dessus de l'extrémité de la branche latérale qui lui est opposée, dans la même zone du labyrinthe, nous obtenons l'inhibition du dressage, comme si la photonégativité jouait seule. Szymanski (4), Turner (5), Hunter (6), Minami et Dallenbach (7), avaient déjà montré que les Blattes pouvaient être dressées à éviter un abri obscur lorsqu'elles y avaient reçu une secousse électrique; ils obtenaient une inversion de la photonégativité, et nous arrivons, par une autre technique, à mettre en évidence un phénomène du même ordre.

---

(3) *Le phototropisme animal*, 1939 (Publ. Fac. Lettres Strasbourg).
(4) *J. anim. behav.*, 2, 1912, p. 81-90.
(5) *Biol. Bull.*, 23, 1912, p. 371-386.
(6) *J. Genet. Psych.*, 41, 1932, p. 253.
(7) *Americ. Jour. of Psychol.*, 59, 1946, p. 1-56.

PATHOLOGIE. — *La pneumopathie du Cobaye est transmissible à l'Homme et à certains animaux sous forme inapparente.* Note (*) de MM. **Georges Blanc**, **Jean Bruneau** et **Louis-André Martin**, présentée par M. Jacques Tréfouël.

Dans une Note précédente ([1]) nous avons étudié le comportement du virus de la pneumopathie du Cobaye chez divers arthropodes hématophages; nous présentons ici son comportement chez l'Homme et chez quelques vertébrés, mammifères et oiseaux.

Le Virus. — Rapporté de Paris, sous forme d'une rate de cobaye inoculé de virus de Q. fever d'origine australienne ([2]). Les passages au cobaye ont rapidement fait apparaître le virus de pneumopathie que nous identifions à celui qu'ont décrit P. Lepine et V. Sautter ([3]). Ce virus donne au cobaye les lésions décrites de façon précise par ces auteurs; il tue toujours le cobaye en douze jours environ. Cultivé sur œufs embryonnés, nous avons constaté qu'il traverse les bougies L1 à L5, est arrêté par L9 et n'est pas retenu par les membranes gradocol de $0^{\mu},350$, mais ne traverse pas celles de $0^{\mu},200$.

Comportement chez l'homme et les animaux autres que le cobaye. — L'homme, le macaque (*Macaca sylvanus*), le chien, le lapin, l'âne, la chèvre, le chameau, font une infection strictement inapparente avec présence du virus dans le sang puis état d'immunité et apparition d'anticorps dans le sérum; les oiseaux, coqs et pigeons, ne s'infectent pas.

Présence du virus dans le sang. — Chez l'homme (5 sujets), nous avons isolé le virus du sang par passage au cobaye, du 5e au 15e jour après l'inoculation; chez le macaque (1 sujet) du 8e au 25e jour; chez le chien (3 sujets) du 4e au 20e jour; chez le lapin (15 sujets) du 5e au 18e jour de façon quasi constante: 22 résultats positifs sur 24, au 20e jour, trois fois sur cinq, un résultat positif au 28e et un au 35e jour; chez l'âne (1 sujet) du 7e au 11e jour; chez le chevreau (4 sujets) du 7e au 14e jour; chez le chameau (1 sujet) du 6e au 13e jour.

Immunité. — L'homme ou les animaux réinoculés avec le virus de la pneumopathie du cobaye après disparition du virus de leur sang ne se réinfectent pas. Deux hommes ont présenté, après une première inoculation, le virus dans le sang du 5e au 11e et du 5e au 15e jour. Réinoculés 35 jours après la première inoculation, aucun d'eux ne se réinfecte. La recherche de virus du

(*) Séance du 27 septembre 1948.

([1]) G. Blanc et J. Bruneau, *Comptes rendus*, 227, 1948, p. 375.

([2]) Comme virus supposé de Q. fever nous l'avons utilisé avec d'autres souches de cette Rickettsia au cours de recherches que nous avons exposées à l'Académie de Médecine (*Comptes rendus*, 132, 1948, p. 243.)

C'est ainsi que nous avons constaté sa parfaite innocuité pour l'homme.

([3]) *Ann. Inst. Pasteur*, 71, 1945, p. 102.

3e au 15e jour reste négative. Trois lapins inoculés ont du virus dans le sang du 5e au 20e jour après l'inoculation; ils sont réinoculés respectivement deux 39 jours et le troisième 41 jours après la première inoculation. Le sang examiné du 10e au 20e jour reste non virulent.

Détection d'anticorps par le sérotest de protection. — Cette recherche est délicate car le cobaye est un test d'une telle sensibilité au virus de la pneumopathie que la moindre quantité de virus non neutralisée donne à l'animal une infection le plus souvent mortelle. Cependant il arrive que le début de la maladie soit retardé et quelquefois très retardé; l'animal peut même survivre à l'inoculation et dans ce cas présente une immunité parfaite à l'inoculation d'épreuve.

En rechargeant un animal à plusieurs reprises avec de fortes doses de virus on peut obtenir un sérum donnant un test de protection meilleur. Cette technique a été utilisée sur l'âne qui a reçu sans réagir de fortes doses par voie intraveineuse et dont le sérum a une nette action neutralisante.

En résumé. — Le virus de la pneumopathie du cobaye réalise l'infection inapparente chez l'homme et divers animaux; grâce à la sensibilité exquise du cobaye cette constatation est facile.

Il est probable que bien des infections de l'homme ou des animaux existent, en dehors de l'espèce sensible, sous forme inapparente chez d'autres espèces animales. Il peut arriver aussi que certaines infections en changeant d'hôte acquièrent des propriétés nouvelles qui les rendent difficiles à interpréter. Nous avons décrit une de ces formes *voilées* dans la poliomyélite du lapin (1).

Il ne s'agit plus seulement en médecine expérimentale de rechercher sur l'animal en expérience le seul type clinique de la maladie humaine, il faut aussi rechercher un type infectieux modifié et même la simple infection inapparente.

La séance est levée à 15h40m.

R. C.

---

(1) G. Blanc et L.-A. Martin, *Comptes rendus*, 1948, **227**, p. 242.